This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

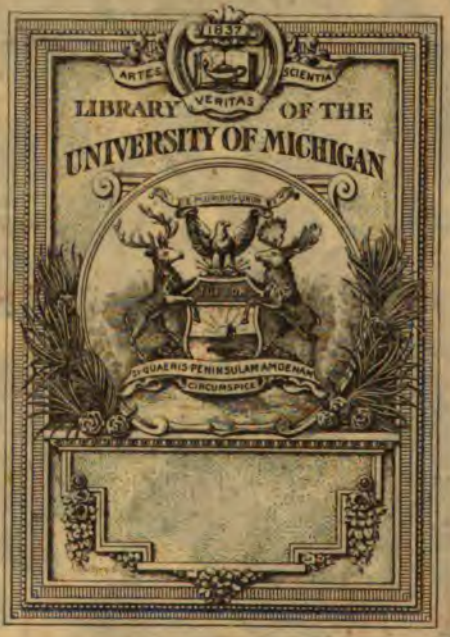
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

NON
CIRCULAT

ΦH
3
.A367
1761

OPUSCULES

MATHÉMATIQUES,

OU

92074

MÉMOIRES sur différens sujets de GÉOMÉTRIE, de MÉCHANIQUE, D'OPTIQUE, D'ASTRONOMIE &c.

Par M. D'ALEMBERT, *de l'Académie Françoise, des Académies Royales des Sciences de France, de Prusse & d'Angleterre, de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suéde, & de l'Institut de Bologne.*

TOME SECOND.

A PARIS,

Chez DAVID, rue & vis-à-vis la grille des Mathurins.

M. DCC. LXI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.

TABLE
DES MÉMOIRES
Contenus en ce ſecond Tome.

DIXIÉME MÉMOIRE.

Réflexions ſur le calcul des Probabilités, Pag. 1

ONZIÉME MÉMOIRE.

Sur l'application du calcul des Probabilités à l'inoculation de la petite Vérole, pag. 26

NOTES *ſur le Mémoire précédent*, pag. 47

THEORIE MATHÉMATIQUE *de l'inoculation*, pag. 57

DOUZIÉME MÉMOIRE.

Application de ma ſolution du Problême des trois Corps à la théorie des Comètes, pag. 96

TREIZIÉME MÉMOIRE.

Réflexions ſur la Comète de 1682 *&* 1759, p. 218

QUATORZIÉME MÉMOIRE.

Réflexions ſur le Problême des trois Corps, avec de nou-

velles Tables de la Lune, d'un uſage très-ſimple & très-facile, pag. 239
NOUVELLES TABLES *de la Lune,* pag. 281
EXEMPLE *pour faire uſage de ces Tables,* p. 307

QUINZIÉME MÉMOIRE.

De la libration de la Lune, pag. 313

OPUSCULES

MATHÉMATIQUES.

DIXIÉME MÉMOIRE.

Réfléxions ſur le calcul des Probabilités.

I.

LA régle ordinaire de *l'analyſe des jeux de hazard*, eſt celle-ci : *multipliez le gain ou la perte que chaque événement doit produire, par la probabilité qu'il y a que cet événement doit arriver ; ajoutez enſemble tous ces produits, en regardant les pertes comme des gains négatifs ; & vous aurez l'eſpérance du joueur, ou, ce qui revient au même, la ſomme*

que ce joueur devroit donner avant le jeu, pour commencer à jouer but-à-but. Aucun Analyſte, que je ſache, n'a juſqu'ici révoqué cette régle en doute, & tous s'y ſont conformés dans les calculs qu'ils ont faits des différentes probabilités. Il ſe trouve néanmoins des cas où elle paroît être en défaut, & qui vont faire la matiere de quelques réfléxions.

II.

Le premier de ce cas eſt celui dont il eſt fait mention dans le Tome V des Mémoires de l'Académie de Peterſbourg. Pierre joue avec Jacques à *croix* ou *pile*, à cette condition, que ſi Pierre amene *croix* au premier coup, Jacques lui donnera un écu; s'il n'amene *croix* qu'au ſecond coup, deux écus; ſi au troiſiéme coup, quatre écus; ſi au quatriéme, huit écus, & ainſi de ſuite en progreſſion Géométrique; on demande l'eſpérance de Pierre, ou ce qu'il doit donner à Jacques pour jouer avec lui à jeu égal.

Suivant les régles ordinaires, la probabilité que *croix* arrivera au premier coup, eſt $\frac{1}{2}$, au ſecond coup $\frac{1}{4}$, au troiſiéme $\frac{1}{8}$, &c. & ainſi de ſuite; donc conformément à la régle ci-deſſus, l'eſpérance ou l'enjeu de Pierre ſeroit $1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} +$ &c. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ &c. à l'infini $= \infty$; c'eſt-à-dire, que Pierre devroit donner à Jacques avant de commencer le jeu, une ſomme infinie, pour jouer avec lui à jeu égal. Or, indépendamment de ce qu'une *ſomme infinie* eſt une chimere, il n'y a perſonne

qui voulût donner pour jouer à ce jeu, je ne dis pas une ſomme infinie, mais même une ſomme aſſez modique. La régle paroît donc être en défaut, au moins pour ce cas.

III.

La premiere idée qui ſe préſente pour la juſtifier, eſt de dire, que ſi l'eſpérance où l'enjeu de Pierre ſe trouve infini, c'eſt parce qu'on ſuppoſe tacitement que le jeu doit ou peut durer un tems infini; c'eſt-à-dire, que *croix* peut n'arriver qu'après un nombre infini de jets. Or, dira-t-on, cette ſuppoſition eſt abſurde; car il faudra bien que *croix* arrive enfin après un nombre de jets *fini*, ſi grand qu'on voudra. Le jeu propoſé ne doit donc pas durer toujours, ne le ſauroit même, & par conſéquent l'eſpérance de Pierre n'eſt que finie.

IV.

A cela je réponds d'abord qu'on ſuppoſe gratuitement que *croix* doit arriver *néceſſairement* après un nombre fini de coups; car il eſt dans l'ordre des choſes poſſibles (telles que l'analyſe ordinaire des jeux de hazard les conſidere) que *pile* arrive à tous les coups, & que par conſéquent *croix* n'arrive jamais. L'analyſe des jeux de hazard (telle encore une fois que tous les Mathématiciens l'ont ſuivie juſqu'à préſent) ſuppoſe que toutes les combinaiſons ſont également poſſibles, chacune en particulier. Que l'on joue, par exemple, en 60

coups, au lieu de jouer en un nombre de coups indéfini; le nombre des combinaiſons poſſibles eſt 2^{60}, & ſur ces combinaiſons il y en a une qui n'amenera jamais *croix*; mais cette combinaiſon eſt regardée par les Analyſtes, comme étant auſſi poſſible, qu'aucune des autres combinaiſons priſe en particulier. Il eſt donc poſſible (au moins en ſuivant les principes adoptés juſqu'à préſent par les Analyſtes) que *croix* n'arrive jamais; & par conſéquent on ne doit point reprocher au calcul précédent, ni cette ſuppoſition, ni la conſéquence néceſſaire qui en réſulte, ſavoir une ſomme infinie pour l'eſpérance ou l'enjeu de Pierre; ou bien, ſi on attaque cette ſuppoſition, il faudra néceſſairement réformer, à pluſieurs autres égards, l'analyſe des probabilités; c'eſt ce que nous diſcuterons plus bas.

V.

En ſecond lieu, je veux bien ſuppoſer que *croix* arrivera enfin *néceſſairement* après un nombre fini de coups; il eſt au moins évident qu'on ne ſauroit fixer ce nombre de coups, qu'il eſt *indéterminé* ou *indéfini*; d'où je conclus deux choſes; 1°. que quelque ſomme finie qu'on aſſigne pour l'eſpérance ou l'enjeu de Pierre, cette ſomme pourra être au-deſſous de celle qu'il doit donner réellement à Jacques. Suppoſons, par exemple, qu'on aſſigne trente écus pour l'eſpérance de Pierre; on aura donc ſuppoſé que *croix* doit arriver *néceſſairement* en ſoixante coups; ce qui eſt abſurde. Car il eſt évident (§. précédent) qu'en ſe bornant à conſidérer ce qui eſt ri-

goureuſement poſſible, *pile* peut arriver ſoixante fois de ſuite; & d'ailleurs pourquoi *croix* arriveroit-il *néceſſairement* en ſoixante coups, plutôt qu'en cinquante-neuf ou en ſoixante-un? Il en ſera de même de toute autre ſuppoſition qu'on pourroit faire. 2°. Si on dit que la ſomme qui indique l'eſpérance de Pierre, eſt *finie* & *indéterminée*, on ne fait qu'éluder la queſtion; car il eſt évident qu'on peut ſuppoſer deux joueurs qui jouent enſemble aux conditions propoſées; il eſt évident de plus que Pierre doit avoir à ce jeu un grand avantage, & il s'agit de ſavoir comment eſtimer cet avantage inconnu; car il eſt évident encore que cet avantage n'eſt pas infini, quoique le calcul ſemble le donner plus grand qu'aucun avantage fini. Voilà donc un cas, très-poſſible dans les jeux de hazard, où la régle eſt en défaut; cette régle n'eſt donc pas générale.

VI.

En troiſiéme lieu, je ſuppoſe que l'on joue en un nombre fini de coups, par exemple, en cent coups; on trouvera que Pierre doit donner cinquante écus à Jacques. Or il n'y a point de joueur qui voulût donner cette ſomme en pareil cas; car il faudroit, pour qu'il rattrapât cette ſomme en jouant, que *croix* ne vînt qu'au ſeptiéme coup; & aſſurément Pierre croiroit trop riſquer d'attendre que ce cas arrivât.

VII.

Un Géometre célébre de l'Académie des Sciences,

plein de ſavoir & de ſagacité, avec lequel je raiſonnois un jour ſur cette queſtion, m'en donna une ſolution qui paroît d'abord ſatisfaiſante, & qui eſt très-ſimple, quoique très-ingénieuſe. » On ne doit point ſuppoſer, me » dit-il, que le nombre des jets ſoit infini, ni même in» déterminé; car Jacques, quelque riche qu'on le ſup» poſe, n'a pas une ſomme infinie en argent à donner » à Pierre; il n'a, & ne peut avoir qu'une certaine quan» tité finie d'argent. Suppoſons-le riche de 2^{99} écus, ſom» me exorbitante, & qui paſſe le vraiſemblable; il eſt » évident qu'il ne pourra jouer au-delà de cent coups; » & qu'ainſi l'eſpérance ou l'enjeu de Pierre eſt cinquante » écus. Voilà ce que Pierre doit donner à Jacques pour » jouer avec Jacques à jeu égal: & en général ſi le bien » de Jacques eſt 2^x, ou entre 2^x & 2^{x+1}, il ne peut » jamais y avoir plus de $x+1$ coups poſſibles, & l'eſpé» rance ou l'enjeu de Pierre ſera $\frac{1+x}{2}$ écus ». Telle eſt la ſolution imaginée par ce ſavant Géometre.

VIII.

Mais la remarque faite dans le §. VI, montre, ce me ſemble, l'inſuffiſance de cette ſolution, toute ingénieuſe & toute ſimple qu'elle eſt. Car dans le cas propoſé, où le bien de Jacques eſt ſuppoſé 2^{99} écus, & où l'on joue en cent coups, il eſt bien certain que Pierre croiroit riſquer beaucoup au-delà de ce qu'il doit, en donnant cinquante écus à Jacques. Pourquoi cela? C'eſt, comme

nous l'avons dit, qu'il faudroit, pour que Pierre rattrapât ſa miſe & au-delà, que *croix* n'arrivât qu'au ſeptiéme coup; que, ſuivant les régles ordinaires du calcul des combinaiſons, il y a 127 contre un à parier que *croix* arrivera plutôt, auquel cas Pierre perdra ſa miſe en partie ou en total; & qu'une probabilité de 127 contre un eſt ſi petite, qu'on ne doit point riſquer une ſomme d'argent (même aſſez médiocre) vis-à-vis de cette probabilité, quand même le gain qui en pourroit réſulter, ſeroit immenſe. En voici la preuve. Qu'on propoſe à quelque homme que ce ſoit de gagner dix millions à une Loterie de 128 billets, où il n'y a que ce ſeul lot de dix millions; ſon eſpérance & ſon enjeu par conſéquent, ce qu'il devroit donner pour jouer au pair (ſuivant les régles ordinaires des probabilités) ſeroit $\frac{10000000}{128} =$ 78125*. Cependant quel ſeroit l'homme aſſez inſenſé pour riſquer cette ſomme?

IX.

Dira-t-on que cette ſomme ne peut pas être riſquée par cette ſeule raiſon, qu'étant trop forte, elle feroit une bréche trop conſidérable aux biens du Joueur? Mais 1°. il s'enſuivra au moins de-là, que quelque grande que ſoit la ſomme eſpérée (qui eſt ici de dix millions) la miſe ne doit pas toujours y être proportionnelle, tout le reſte d'ailleurs égal; & qu'ainſi il y auroit au moins à cet égard des modifications à donner à la régle, juſqu'à préſent admiſe par tous les Analyſtes, que la

miſe doit être proportionnelle à la ſomme que l'on eſpere. 2°. Suppoſons qu'au lieu de dix millions, le lot ou la ſomme eſpérée ne ſoit que de 128 écus, il faudra que le joueur donne un écu pour ſa miſe; & quoiqu'un des 128 billets doive ſortir de la roue, & que ce billet puiſſe être abſolument celui qui porte le lot, il n'eſt perſonne qui en ce cas ne doive regarder ſa miſe comme de l'argent perdu, par le grand riſque qu'elle court. Il eſt vrai, que ſi le joueur n'eſt pas fort pauvre, cette perte l'incommodera peu; mais enfin c'eſt toujours une perte; & dans l'analyſe des jeux de hazard, on conſidere la perte ou le gain d'une maniere abſolue, & indépendamment de la fortune des Joueurs.

X.

Que conclure de ces réfléxions? C'eſt que *quand la probabilité d'un événement eſt fort petite, elle doit être regardée & traitée comme nulle; & qu'il ne faut point multiplier* (comme on l'a preſcrit juſqu'à préſent) *cette probabilité par le gain eſpéré, pour avoir l'enjeu ou l'eſpérance.* Par exemple, que Pierre joue avec Jacques en 100 coups, à cette condition que ſi Pierre amene *croix* au centiéme coup, & non auparavant, il recevra de Jacques 2^{100} écus: on trouve (en ſuivant la régle ordinaire) que Pierre devroit donner un écu à Jacques avant le jeu. Or je dis que Pierre ne doit pas donner cet écu; parce qu'il le perdra *certainement*, & que *croix* arrivera

certainement

certainement avant le centiéme coup, bien qu'il ne doive pas arriver *néceſſairement.*

XI.

Pour confirmer ce que je viens de dire, je ſuppoſe qu'on jette une piéce en l'air cent fois de ſuite: il eſt certain; 1°. que le nombre des combinaiſons poſſibles eſt 2^{100}, c'eſt-à-dire, qu'il y a 2^{100} différentes combinaiſons poſſibles de la maniere dont *croix* & *pile* peuvent arriver, lorſqu'on jette la piéce en l'air cent fois de ſuite; ce qui fait en tout $2^{100} \times 100$ coups. 2°. Que ſi par conſéquent on jette la piéce en l'air $2^{100} \times 100$ fois de ſuite, c'eſt-à-dire, qu'on recommence le jeu 2^{100} fois, il ſera arrivé 2^{100} combinaiſons de *croix* & *pile* pris dans cent jets conſécutifs. 3°. Que par conſéquent chacun des 2^{100} événemens ſe trouvera une fois, ou quelqu'un pluſieurs fois, parmi les 2^{100} combinaiſons que *croix* ou *pile* doivent produire dans ce cas. Or je dis qu'on peut parier ſans rien craindre, que de ces 2^{100} combinaiſons, celle qui amenera *croix* cent fois de ſuite, ou *pile* cent fois de ſuite, n'arrivera pas une ſeule fois dans les 2^{100} qu'on a (*hyp.*) recommencé le jeu, en jettant à chaque jeu la piéce en l'air cent fois de ſuite; par conſéquent quelqu'une ou pluſieurs des combinaiſons, où *croix* & *pile* ſe trouvent mêlés, arriveront néceſſairement pluſieurs fois dans ces 2^{100} fois. J'ajoute que les combinaiſons qui arriveront le plus ſouvent, ſeront celles où *croix* & *pile* ſe trouveront le plus mêlés,

c'eſt-à-dire, où *croix* & *pile* ne ſe trouveront pas un grand nombre de fois de ſuite; d'où il s'enſuit, ce me ſemble, qu'on doit regarder les combinaiſons où *croix* & *pile* ſe trouvent mêlés, comme les plus probables & les plus *poſſibles* de toutes. Pour rendre cela encore plus ſenſible, je ſuppoſe que a^{100} Joueurs jettent en même-tems un écu en l'air, cent fois de ſuite; je dis que dans aucun de ces jets, on n'aura cent fois de ſuite ni *croix* ni *pile*, & que par conſéquent il y aura pluſieurs jets qui donneront la même choſe; & que les jets où *croix* & *pile* ſont entremêlés, ſans ſe trouver un grand nombre de fois de ſuite, ſeront ceux qui ſeront répétés.

XII.

C'eſt qu'il faut diſtinguer entre ce qui eſt *métaphyſiquement* poſſible, & ce qui eſt poſſible *phyſiquement*. Dans la premiere claſſe ſont toutes les choſes dont l'exiſtence n'a rien d'abſurde; dans la ſeconde ſont toutes celles dont l'exiſtence non-ſeulement n'a rien d'abſurde, mais même rien de trop extraordinaire, & qui ne ſoit dans le cours journalier des événemens. Il eſt *métaphyſiquement* poſſible, qu'on amene raſle de ſix avec deux dez, cent fois de ſuite; mais cela eſt impoſſible *phyſiquement*, parce que cela n'eſt jamais arrivé, & n'arrivera jamais. Dans le cours ordinaire de la nature, le même événement (quel qu'il ſoit) arrive aſſez rarement deux fois de ſuite, plus rarement trois & quatre fois, & jamais cent fois conſécutives; & il n'y a perſonne

qui en toute ſûreté ne puiſſe parier tout ſon bien, quel que grand qu'il ſoit, que raſle de ſix n'arrivera jamais cent fois de ſuite.

XIII.

On peut donc, ce me ſemble, poſer pour régle, que quand la probabilité eſt fort petite, on doit dans l'uſage ordinaire de la vie, la regarder comme zéro, & la traiter comme telle. Or ſur cela on peut faire les queſtions ſuivantes.

1°. Quel eſt le terme où la probabilité commence à pouvoir être regardée comme nulle? Quelle eſt la fraction qui exprime le premier terme de cette ſuite de probabilités équivalentes à zéro?

2°. Suppoſé qu'on puiſſe fixer ce terme, & que ce ſoit, par exemple, quand la probabilité eſt $\frac{1}{1000}$, comment faudra-t-il eſtimer les probabilités qui différent très-peu de celle-ci, quoiqu'un peu plus grandes, par exemple, les probabilités $\frac{1}{999}$, $\frac{1}{998}$, &c? S'il ne faut pas regarder ces probabilités comme plus petites qu'elles ne ſont en effet, je demande comment la probabilité $\frac{1}{999}$ devient tout d'un coup $= 0$ dans le cas où elle eſt $\frac{1}{1000}$? L'expreſſion de la probabilité peut-elle paſſer ainſi bruſquement & ſans gradation, d'une expreſſion finie à une valeur nulle? Et s'il faut regarder ces probabilités comme plus petites qu'elles ne ſont, je demande ſuivant quelle loi il faut les diminuer? Si l'Analyſte répond qu'il l'ignore, en ce cas il doit convenir que la régle

générale des probabilités eſt fautive & imparfaite ; ce que nous voulions prouver.

3°. S'il faut diminuer ces probabilités $\frac{1}{995}$, $\frac{1}{996}$, $\frac{1}{997}$, $\frac{1}{998}$ &c. qui forment une eſpèce de ſerie, juſqu'à quel terme faudra-t-il les diminuer ? S'il ne faut les diminuer que juſqu'à un certain terme, pourquoi faut-il s'arrêter à ce terme-là ? S'il faut diminuer tous les termes, même ceux qui contiennent des fractions aſſez grandes, comme $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c. pour lors la régle des probabilités ſe trouvera fautive & imparfaite, même dans le cas où la probabilité ne ſera pas fort petite.

XIV.

En voilà plus qu'il n'en faut, ce me ſemble, pour montrer aux Mathématiciens que la régle générale du calcul des probabilités eſt défectueuſe à certains égards. Je vais tâcher de le faire voir encore par d'autres exemples. Mais auparavant je propoſerai une idée qui m'eſt venue, pour eſtimer dans les cas précédens le rapport des probabilités.

Je ſuppoſe, par exemple, qu'on jette une piéce en l'air quatre fois de ſuite ; on aura 2^4 ou 16 combinaiſons différentes de *croix* & *pile* pris quatre à quatre. Si donc on recommence ce jeu un nombre de fois qui ſoit multiple de 16, ou, ce qui revient au même, ſi 32 ou 64 &c. Joueurs différens jouent à la fois ce jeu, chacun en particulier, en jettant chacun un écu en l'air quatre fois de ſuite ; il eſt évident que quelqu'une ou

quelques-unes des 16 combinaiſons ſe trouveront répétées. Or je crois que les combinaiſons qui ſeront répétées le plus rarement, & qui peut-être n'arriveront point du-tout dans un grand nombre de jets, ſeront celles dans leſquelles *croix* ſe trouve quatre fois de ſuite, ou *pile* quatre fois de ſuite. D'après cette expérience, répétée un grand nombre de fois de ſuite, on pourroit peut-être eſtimer le rapport des probabilités, par le nombre des événemens. Il eſt vrai que le réſultat pourra laiſſer des doutes; & que d'ailleurs l'expérience ſeroit impraticable, ſi le nombre des jets, au lieu d'être de quatre, ainſi qu'on l'a ſuppoſé, étoit beaucoup plus grand, comme de cent; mais voilà, ce me ſemble, le ſeul moyen de parvenir en ce cas à un réſultat qui ſoit au moins approchant du vrai.

XV.

Venons aux autres exemples que j'ai promis dans l'Article précédent, du peu d'exactitude du calcul ordinaire des probabilités.

Dans ce calcul, en combinant tous les événemens poſſibles, on fait deux ſuppoſitions qui peuvent, ce me ſemble, être conteſtées.

La premiere de ces ſuppoſitions eſt, que ſi un même événement eſt déja arrivé pluſieurs fois de ſuite, par exemple, ſi au jeu de *croix* ou *pile*, *croix* eſt arrivé trois fois de ſuite, il eſt également probable que *croix* ou *pile* arriveront au quatriéme coup? Or je demande ſi cette

ſuppoſition eſt bien vraie, & ſi le nombre de fois que *croix* eſt déja arrivé de ſuite par l'hypothèſe, ne rend pas plus probable l'arrivée de *pile* au coup ſuivant? Car enfin il n'eſt pas vraiſemblable, il eſt même *phyſiquement* impoſſible que *pile* n'arrive jamais. Donc plus *croix* ſera arrivé de fois conſécutives, plus il eſt vraiſemblable que *pile* doit arriver le coup d'enſuite. Si cela eſt, comme il me paroît qu'on ne ſauroit guères en diſconvenir, la régle des combinaiſons des événemens poſſibles eſt donc encore défectueuſe à cet égard.

XVI.

Une autre ſuppoſition que l'Analyſe fait d'ordinaire, & qui a du rapport à la précédente, c'eſt que dans le nombre des combinaiſons poſſibles, celle qui amenera pluſieurs fois de ſuite le même événement, eſt auſſi poſſible que chacune des autres en particulier. Par exemple, dans un jeu où on doit jouer à *croix* ou *pile* en cent coups, on regarde la combinaiſon qui amenera *croix* cent fois de ſuite, comme auſſi poſſible que chacune de celles où *croix* & *pile* ſeront mêlés. Or je demande ſi cette ſuppoſition eſt bien juſte; puiſqu'il eſt *phyſiquement* certain (§. X & XI.) que *croix* n'arrivera jamais cent fois de ſuite, & qu'il ne l'eſt pas qu'une combinaiſon où *croix* & *pile* ſeroient mêlés à volonté, n'arrivera pas. On peut réduire ceci à la queſtion ſuivante. Que *A* repréſente *croix* & *B pile*, la combinaiſon *AAAAAAAA* &c. doit-elle être regardée comme

auſſi poſſible que toute autre combinaiſon particuliere à volonté, par exemple *AABABABB* &c. où *croix* & *pile* ſont mêlés ſans ordre & ſans ſuite? C'eſt ce que je ne crois pas, par la raiſon que j'ai déja dite plus haut; ſavoir, que la variété des événemens ſucceſſifs eſt un phénomène conſtant de la nature; & que leur ſimilitude conſtante ou répétée un grand nombre de fois, eſt au contraire un phénomène qui n'arrive jamais.

XVII.

Or ſi on ne doit pas regarder toutes les combinaiſons comme également poſſibles; ſi on doit rejetter, ou au moins ſubordonner aux autres, celles qui ameneroient le même événement un très-grand nombre de fois de ſuite, quelle régle doit-on ſe faire ſur ce ſujet? Doit-on étendre cette reſtriction aux combinaiſons qui ameneroient le même événement un petit nombre de fois de ſuite, par exemple, trois ou quatre fois? Et ſi on ne doit pas l'étendre juſqu'à ces combinaiſons, quelle eſt celle où il faudra commencer? Voilà, ce me ſemble, des queſtions bien dignes d'exercer les Mathématiciens, ſuppoſé néanmoins qu'il ſoit poſſible de les réſoudre.

XVIII.

Autre inconvénient où l'on tombe dans le calcul des Probabilités. J'ai déja remarqué dans l'*Encyclopédie*, au mot *Croix* ou *Pile*, que dans ce calcul on fait ſouvent une énumération fautive des événemens poſſibles.

Par exemple, on demande combien on peut parier d'amener *croix* en deux coups? » Toutes les combinaisons possibles, répond-on, sont celles-ci:

Premier coup.	Second coup.
Croix	*Croix*
Croix	*Pile*
Pile	*Croix*
Pile.	*Pile.*

» Or de ces quatre combinaisons la derniere seule fait » perdre, & les trois autres font gagner; la probabilité » est donc de trois contre un «.

Il est aisé de voir que cette énumération est fautive. Car dès que *croix* sera arrivé au premier coup, le jeu est fini, on n'en jouera pas un second; & ainsi les deux premieres combinaisons *croix croix*, *croix pile*, se réduisent à *croix* seule. Il n'y a donc que trois coups possibles;

Premier coup.	Second coup.
Croix	
Pile	*Croix*
Pile	*Pile*

D'où j'ai conclu à l'endroit cité, que la probabilité étoit seulement de deux contre un, & non pas de trois contre un. J'examinerai plus bas si j'ai eu raison de réduire la probabilité au rapport de deux à un; mais il est au moins bien certain que la maniere dont on prouve qu'elle est de trois à un, est un paralogisme.

XIX.

XIX.

Le paralogiſme eſt encore plus grand, ſi l'on parie d'amener *croix*, non pas en deux coups, mais en cent coups de ſuite. Car dans ce cas, en ſuivant le raiſonnement ordinaire, on ſuppoſe que la combinaiſon qui ameneroit *croix* cent fois de ſuite, eſt auſſi poſſible qu'aucune des autres en particulier. Or cette ſuppoſition (§. XVI.) eſt au moins très-ſuſceptible de conteſtation. Il eſt donc au moins démontré, que cette maniere de réſoudre le Problême eſt incertaine, & peut-être fautive.

XX.

Je ſai qu'on peut enviſager la choſe d'une autre maniere, & faire le raiſonnement ſuivant. « La probabilité » que *croix* arrivera au premier coup eſt $\frac{1}{2}$; la probabilité que *pile* arrivera au premier coup, eſt pareillement » $\frac{1}{2}$; or dans ce ſecond cas, la probabilité que *croix* arrivera au ſecond coup eſt $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, & celle que *pile* arrivera au ſecond coup eſt $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$; ainſi la ſomme des probabilités favorables, eſt à celle des probabilités défavorables, comme $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2}$ eſt à $\frac{1}{2 \cdot 2}$, ou comme » 3 à 1. Donc la probabilité eſt toujours comme trois à » un, même en ne conſidérant que les trois coups réellement poſſibles; ſavoir, *croix* au premier coup; *pile*, » & *croix* au premier & au ſecond coup; ou bien *pile* » & *pile* au premier & au ſecond coup ».

XXI.

Je réponds en premier lieu, que je ne ſai ſi on doit eſtimer par $\frac{1}{2.2}$ ou $\frac{1}{4}$, la probabilité qu'on amenera *pile* ou *croix* au ſecond coup. Je conviens qu'il eſt incertain ſi on jouera un ſecond coup ou non; & que la probabilité qu'on jouera ce ſecond coup eſt $\frac{1}{2}$: mais la probabilité qu'on amenera *pile* ou *croix* au ſecond coup, ſuppoſe *néceſſairement* qu'on jouera ce ſecond coup: ainſi, multiplier la probabilité $\frac{1}{2}$ d'amener *croix* ou *pile* au ſecond coup (en ſuppoſant qu'on joue ce ſecond coup), par la *probabilité* $\frac{1}{2}$ qu'on jouera ce ſecond coup, n'eſt-ce pas regarder à la fois ce ſecond coup comme devant avoir lieu, & comme étant néanmoins ſimplement probable? Ce qui me paroît impliquer contradiction. Sans difficulté $\frac{1}{2}$ eſt la probabilité d'amener *croix* à un coup quelconque, en ſuppoſant qu'on joue ce coup; mais s'il eſt incertain qu'on joue ce coup, ſi la probabilité qu'on le jouera, eſt $\frac{1}{2}$, alors multiplier la premiere probabilité $\frac{1}{2}$ par la ſeconde $\frac{1}{2}$, n'eſt-ce pas multiplier l'une par l'autre deux probabilités de différente nature, une probabilité (ſavoir la premiere) qui reſte toujours $=\frac{1}{2}$, & une probabilité (ſavoir la ſeconde) qui ne reſte pas toujours $\frac{1}{2}$, mais qui devient *certitude* dès qu'on la multiplie par la premiere? En effet la probabilité $\frac{1}{2}$ d'amener *croix* ou *pile*, ſuppoſe néceſſairement qu'on jouera le coup; ainſi la combinaiſon de cette probabilité avec la ſeconde fait changer à celle-ci de nature, & la

ſuppoſe *certaine*, de ſimplement *probable* qu'elle étoit auparavant?

XXII.

Je réponds en ſecond lieu, que cette maniere d'eſtimer les probabilités, eſt ſujette à toutes les difficultés dont nous avons parlé au commencement de ce Mémoire. Car ſuppoſons qu'on joue, par exemple, en cent coups; la probabilité que *croix* n'arrivera qu'au centiéme coup, ſeroit ſuivant cette méthode $\frac{1}{299}$; ce qui ſuppoſe que la probabilité que *pile* arrivera 99 fois de ſuite, eſt $\frac{1}{299}$. Or je demande s'il eſt phyſiquement poſſible que *pile* arrive 99 fois de ſuite; & ſi par conſéquent on ne doit pas (§. XII.) regarder la probabilité $\frac{1}{299}$ comme égale à zéro? Si cela eſt, il s'enſuivra; 1°. que la régle eſt fautive, au moins dans le cas où on joue un grand nombre de coups de ſuite; 2°. qu'elle eſt au moins fort incertaine dans les autres, puiſqu'il n'y a pas de raiſon, par exemple, de ne pas diminuer la probabilité $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{16}$ de quelque petite partie, ſi la probabilité $\frac{1}{299}$ doit être regardée comme nulle.

XXIII.

Je viens maintenant aux difficultés qu'on peut faire ſur la méthode que nous avons donnée Art. XVIII,

pour déterminer le rapport des probabilités dans le cas où l'on joue à *croix* ou *pile* en deux coups. On convient d'abord (voyez l'*Encyclopédie* au mot GAGEURE) que les trois coups

Croix
Pile Croix
Pile Pile

ſont à la vérité les ſeuls poſſibles; mais on prétend qu'ils ne le ſont pas également; » car, dit-on, la probabilité » d'amener *croix* au premier coup eſt égale à celle d'ame- » ner *pile* au premier coup. Or la probabilité d'amener » *pile* au premier coup, eſt double de celle d'amener *pile* » au premier coup & *croix* au ſecond, ou *pile* au premier coup & *pile* au ſecond. Donc &c. «

Pour développer en quoi conſiſte, ſelon moi, le vice de ce raiſonnement, j'emprunterai le langage des Logiciens; & je dirai que dans cet argument le *moyen terme* n'eſt pas le même dans les deux Propoſitions. Car le moyen terme dans la premiere Propoſition, eſt la probabilité d'amener *pile* au premier coup, *avant d'avoir joué ce premier coup.* Dans la ſeconde Propoſition, le moyen terme eſt la probabilité d'amener *pile* au premier coup, *comparée à la probabilité d'amener croix* ou *pile au ſecond coup.* Or cette derniere probabilité (celle d'amener *croix* ou *pile* au ſecond coup) ſuppoſe que le premier coup eſt joué, & qu'il a donné *pile*; ainſi cette derniere probabilité ſuppoſe que la premiere probabilité (celle d'amener *pile* au premier coup) n'eſt plus une *probabilité*,

mais une *certitude*. Le *moyen terme* eſt donc réellement différent dans les deux Propoſitions. En un mot il y a cette différence entre le coup *croix* & le coup *pile*, arrivant l'un ou l'autre au premier coup, que le coup *croix* n'amene point de ſecond coup, au lieu que le coup *pile* en amene néceſſairement un autre; ainſi il ne faut point comparer d'abord la probabilité de *croix* au premier coup, avec celle de *pile* au même premier coup, & enſuite la probabilité de *pile* au premier coup, avec la probabilité de *croix* ou *pile* au ſecond coup; mais la probabilité de *croix* au premier coup, avec celle de *pile* & *croix* au premier & ſecond coup, ou de *pile* & *pile* aux mêmes premier & ſecond coups.

XXIV.

Je ne voudrois pas cependant regarder en toute rigueur les trois coups dont il s'agit, comme également poſſibles. Car 1°. il pourroit ſe faire en effet (& je ſuis même porté à le croire), que le cas *pile croix* ne fût pas éxactement auſſi poſſible que le cas *croix* ſeul; mais le rapport des poſſibilités me paroît inapprétiable. 2°. Il pourroit ſe faire encore que le coup *pile croix* fût un peu plus poſſible que *pile pile*, par cette ſeule raiſon que dans le dernier le même effet arrive deux fois de ſuite; mais le rapport des poſſibilités (ſuppoſé qu'elles ſoient inégales), n'eſt pas plus facile à établir dans ce ſecond cas, que dans le premier. Ainſi il pourroit très-bien ſe faire que dans le cas propoſé, le rapport des probabilités ne fût ni de 3 à 1, ni de 2 à 1 (comme nous

l'avons ſuppoſé dans l'*Encyclopédie*) mais un incommenſurable ou inapprétiable, moyen entre ces deux nombres. Je crois cependant que cet incommenſurable approchera plus de 2 que de 3, parce qu'encore une fois il n'y a que trois cas poſſibles, & non pas quatre. Je crois de même & par les mêmes raiſons, que dans le cas où l'on joueroit en trois coups, le rapport de 3 à 1, que donne ma méthode, eſt plus près du vrai, que le rapport de 7 à 1, donné par la méthode ordinaire, & qui me paroît exorbitant.

Pour bien fixer l'état de la queſtion, tenons-nous en au cas où l'on joue en deux coups. Il eſt d'abord certain que la probabilité d'amener *croix* au premier coup, eſt égale à celle d'amener *pile* au même premier coup; la difficulté ſe réduit à ſavoir; 1°. quel eſt le rapport de la probabilité d'amener *pile* au premier coup, à la probabilité d'amener *croix* au ſecond coup, quand on aura amené *pile* au premier, & que par conſéquent *il devra y avoir* un ſecond coup; 2°. ſi la probabilité d'amener *pile* au ſecond coup, quand on aura amené *pile* au premier coup, eſt égale ou un peu plus petite que celle d'amener *croix* au ſecond coup, quand on aura amené *pile* au premier; & ſi ces probabilités ne ſont pas égales, quel en eſt le rapport?

XXV.

Lorſqu'on joue en plus de deux ou trois coups, alors le rapport des poſſibilités ou probabilités devient encore

infiniment plus difficile à déterminer. Il eſt évident en effet que ſi on joue en quatre coups, par exemple, il eſt plus probable qu'on amenera *croix* au premier coup, que *pile*, *pile*, *pile*, *pile* en quatre coups conſécutifs. Or le rapport de ces poſſibilités eſt encore, ſelon moi, inappréciable, quoique ces poſſibilités ſoient réellement différentes. Je dis plus: il peut ſe faire que *pile*, *pile*, *pile*, *croix*, ſoient plus poſſibles (§. XV.) que *pile* 4 fois de ſuite: or comment comparer ces probabilités? Comment aſſigner leur rapport?

XXVI.

C'eſt par cette conſidération de la différente poſſibilité des cas (lorſque le nombre des jets eſt tant ſoit peu conſidérable) que je vais répondre à une objection qui m'a été faite, & qu'on peut voir dans l'Art. *GAGEURE* de l'Encyclopédie. Il s'enſuivroit, dit-on, une abſurdité de ma maniere de compter les probabilités; ſavoir, qu'on ne pourroit jamais parier avec avantage, d'amener une des faces A, d'un dez à trois faces A, B, C, en tant de coups qu'on voudroit. Car ſoit n ce nombre de coups, on trouveroit toujours que la probabilité eſt de $2^n - 1$ contre 2^n.

Par exemple, ſi $n = 3$, on trouvera que les combinaiſons favorables ſont A, BA, CA, BBA, BCA, CCA, CBA; & que les combinaiſons défavorables ſont BBB, BBC, BCB, BCC, CBB, CBC, CCC, CCB; ce qui donne le rapport de 7 à 8, ou de $2^3 - 1$ à 2^3.

Cette objection ſuppoſe que tous les cas ſont également poſſibles dans l'énumération faite à ma maniere; or ils ne le ſont pas; car *A* au premier coup eſt plus poſſible, par exemple, que *B* quatre fois de ſuite. Il eſt vrai que je crois difficile d'en aſſigner le rapport, & que la théorie ordinaire des Analyſtes ſur cet objet me paroît peu ſatisfaiſante; mais il ſuffit, pour répondre à l'objection, que tous les cas ne ſoient pas également poſſibles.

XXVII.

Concluons de toutes ces réfléxions; 1°. que ſi la régle que j'ai donnée dans l'*Encyclopédie* (faute d'en connoître une meilleure) pour déterminer le rapport des probabilités au jeu de *croix* & *pile*, n'eſt point éxacte à la rigueur, la régle ordinaire pour déterminer ce rapport, l'eſt encore moins; 2°. que pour parvenir à une théorie ſatisfaiſante du calcul des probabilités, il faudroit réſoudre pluſieurs Problêmes qui ſont peut-être inſolubles; ſavoir, d'aſſigner le vrai rapport des probabilités dans les cas qui ne ſont pas également poſſibles, ou qui peuvent n'être pas regardés comme tels; de déterminer quand la probabilité doit être regardée comme nulle; de fixer enfin comment on doit eſtimer l'eſpérance ou l'enjeu, ſelon que la probabilité eſt plus ou moins grande.

XXVIII.

Je ne parle point ici des conſidérations relatives à l'état

&

& à la fortune des joueurs ; conſidérations eſſentielles ſans doute à faire, mais qui demanderoient preſqu'autant de régles que de cas particuliers. C'eſt d'après ces conſidérations qu'on a eſſayé de réſoudre dans le To. V. des Mém. de Peterſbourg, la queſtion propoſée ci-deſſus Art. II. Les vûes qu'on propoſe ſur cela, ſont fines & ingénieuſes. Mais il y avoit peut-être d'autres réfléxions plus ſimples à faire ſur cette queſtion, plus relatives à la queſtion priſe en elle-même, & plus indépendantes de l'état des joueurs ; & ce ſont, ce me ſemble, celles que nous avons faites au commencement de ce Mémoire, & qui ont fait naître nos autres doutes ſur le calcul des probabilités. Ces doutes m'ont paru dignes d'être propoſés aux Mathématiciens Philoſophes. J'ai tout lieu de croire qu'ils en ſeront frappés comme moi, s'ils les examinent ſans prévention.

Fin du dixiéme Mémoire.

ONZIÉME MÉMOIRE.

Sur l'application du Calcul des Probabilités à l'inoculation de la petite Vérole (a).

ON a tant écrit depuis quelques années pour & contre l'inoculation, & principalement en ſa faveur, que le Public doit être aujourd'hui plus que ſuffiſamment inſtruit ſur ce ſujet, & par conſéquent fatigué d'avance de tout ce qu'on pourroit ajouter encore, pour éclaircir ou pour embrouiller la queſtion. J'ai donc tout lieu de craindre que ce Mémoire n'ennuye déja par ſon ſeul titre ceux qui me font l'honneur de m'entendre. Je me propoſe au moins de ne pas les ennuyer long-tems; & pour leur tenir parole, j'entre promptement en matiere.

Cet écrit aura deux objets: 1°. de prouver que dans les calculs qu'on a faits juſqu'à préſent en faveur de l'inoculation, on n'a point encore, ce me ſemble, enviſagé la queſtion ſous ſon véritable point de vûe: 2°. que la

(a) Ce Mémoire a été lû à l'Aſſemblée publique de l'Académie Royale des Sciences, le 12 Novembre 1760.

difficulté, & peut-être l'impoſſibilité de réduire au calcul les avantages de l'inoculation, n'eſt point une raiſon pour la proſcrire.

On n'inocule gueres avant l'âge de quatre ans; depuis cet âge juſqu'au terme ordinaire de la vie, la petite Vérole naturelle détruit, ſelon les Inoculateurs, environ la ſeptiéme partie du genre humain (*A*); au contraire, ſelon eux, l'inoculation enleve à peine une victime ſur trois cens (*B*). Je ne prétends point leur conteſter ces faits, & je ne m'arrête qu'à la conſéquence qu'ils en tirent; donc, diſent-ils, le riſque de mourir de la petite Vérole naturelle eſt à celui de mourir de la petite Vérole inoculée, comme 300 à 7, c'eſt-à-dire, 40 à 50 fois plus grand.

Cette conſéquence, ainſi préſentée, peut être attaquée avec quelqu'apparence de droit par les adverſaires de l'inoculation. Car en ſuppoſant, diront-ils, que le nombre de ceux qui périſſent de la petite Vérole, ſoit 40 ou 50 fois plus grand que le nombre de ceux qui meurent de l'inoculation, s'enſuit-il que les deux riſques ſoient entr'eux dans le même rapport? La nature de l'un & de l'autre eſt bien différente. Quelque petit qu'on veuille ſuppoſer le riſque de mourir de l'inoculation, celui qui ſe fait inoculer ſe ſoumet à ce riſque dans le court eſpace de quinze jours, dans celui d'un mois tout

(*A*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.
(*B*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

au plus : au contraire le risque de mourir de la petite Vérole naturelle, se répand sur tout le tems de la vie, & en devient d'autant plus petit pour chaque année & pour chaque mois. Si l'on veut faire, continueront-ils, un parallèle éxact des deux risques, il faut que les tems soient égaux; il faut comparer le risque de mourir de l'inoculation, non pas vaguement & en général au risque de mourir de la petite Vérole naturelle dans tout le cours de la vie, mais au danger qu'on court de mourir de cette maladie pendant le même-tems où l'on s'expose à mourir de l'inoculation, c'est à-dire, dans l'espace de quinze jours ou d'un mois.

Il faut avouer que si on admettoit cette maniere de comparer les deux risques, elle donneroit beaucoup d'avantage aux adversaires de l'inoculation. En effet, on ne peut raisonnablement supposer (car on seroit démenti par les faits) que la petite Vérole emporte par mois (année commune) la trois centiéme partie du genre humain: donc le nombre des victimes que la petite Vérole naturelle feroit périr en un mois, est beaucoup moindre que le nombre de celles qui seroient sacrifiées à l'inoculation. Donc on court moins de risque de mourir en un mois de la petite Vérole naturelle qu'on attend, que de la petite Vérole qu'on se donne. Or ne peut-on pas, diront les adversaires de l'inoculation, faire à chaque mois un raisonnement semblable? Donc, ajouteront-ils, dans tout le cours de la vie, on ne pourra parvenir à aucun mois où l'inoculation soit réellement moins

à craindre que la petite Vérole naturelle ; par conſéquent on ſera toujours plus ſage d'attendre la petite Vérole que de ſe la donner (*C*).

Cet argument, qui n'a point encore été propoſé, que je ſache, d'une maniere auſſi frappante, a quelque choſe de ſpécieux. Cependant ſi le calcul des Inoculateurs eſt défectueux en ce qu'on y compare deux riſques dont la durée eſt différente, celui des adverſaires de l'inoculation pêche auſſi par le même côté, quoiqu'à la vérité ſous un autre point de vûe. Celui qui ſe fait inoculer, court, ſi l'on veut, plus de riſque de mourir de la petite Vérole dans le mois, que s'il attendoit cette maladie ; mais le mois étant paſſé, le riſque une fois couru s'éteint, & l'inoculé en eſt délivré ; celui au contraire qui attend la petite Vérole, court, ſi l'on veut, pour chaque mois un moindre riſque que l'inoculé ; mais le mois fini, le riſque ſe renouvelle, & peut même devenir de jour en jour plus grand, au moins juſqu'à un certain âge.

Ainſi, pour ſavoir ce qu'on gagne ou ce qu'on riſque à ſe faire inoculer, il ne ſuffit pas d'avoir égard au danger que l'on court en un mois de mourir de la petite Vérole naturelle ; il faut ajouter à ce danger celui que l'on court de mourir de la même maladie dans les mois ſuivans, juſqu'à la fin de la vie.

C'eſt ici que la difficulté du calcul commence à ſe faire ſentir. Non-ſeulement on n'a point encore d'ob-

(*C*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

ſervations ſuffiſantes pour conſtater au juſte, ni même à-peu-près, quel eſt le riſque qu'on court à chaque âge de mourir de la petite Vérole naturelle dans le courant d'un mois : mais quand on pourroit apprétier éxactement ce danger, pour chaque mois pris ſéparément, comment apprétier enſuite le riſque total, réſultant de la ſomme de ces riſques particuliers, qui s'affoibliſſent en s'éloignant, non-ſeulement par la diſtance où on les voit, diſtance qui tout-à-la-fois les rend incertains, & en adoucit la vûe, mais par l'eſpace de tems qui doit les précéder, & durant lequel on doit jouir de l'avantage de vivre ? Il faudroit pouvoir déterminer ſuivant quel rapport un riſque de cette eſpèce diminue, quand on l'enviſage dans le lointain, & fuyant, pour ainſi dire, devant nous. Problême qui me paroît inſoluble, & dont la ſolution d'ailleurs, quand elle ſeroit poſſible, ſeroit vraiſemblablement différente pour chaque individu, eû égard aux circonſtances où il ſe trouve (*D*).

Un très-grand Géometre, qui nous a donné ſur l'inoculation un ſavant Mémoire Mathématique, a cherché à répandre ſur ce ſujet toute la lumiere dont il l'a cru ſuſceptible.

M. Daniel Bernoulli ſuppoſe d'abord, que parmi tous ceux qui n'ont pas eû la petite Vérole, & qui ſont de même âge, cette maladie en attaque conſtamment un huitiéme chaque année ; & qu'il périſſe auſſi un huitiéme

(*D*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

de ceux qui en ſont attaqués. D'après cette hypothèſe, il détermine, par une Analyſe très-ingénieuſe, la loi de la mortalité cauſée par la petite Vérole naturelle. Il ſuppoſe enſuite que l'inoculation enleve une victime ſur 200, & il en déduit la loi de mortalité dans l'hypothèſe de l'inoculation : comparant enfin les réſultats que les deux hypothèſes fourniſſent, il détermine pour chaque âge le tems qu'on peut eſpérer de vivre de plus, en ſe faiſant inoculer, qu'en attendant la petite Vérole.

Quelques éloges que cette théorie mérite, par l'habileté & la fineſſe avec laquelle l'Auteur l'a développée, elle laiſſe, ce me ſemble, beaucoup à deſirer encore.

En premier lieu, la ſuppoſition que fait l'illuſtre Mathématicien ſur le nombre de perſonnes de chaque âge qui prennent la petite Vérole, & ſur le nombre de ceux qui en meurent, paroît abſolument gratuite. Il n'eſt nullement certain, il eſt même plus que douteux, pour ne rien dire de plus, que la petite Vérole attaque conſtamment (à quelque âge que ce ſoit) la huitiéme partie de ceux qui n'ont pas eû cette maladie; & il eſt plus douteux encore qu'elle faſſe périr conſtamment (à quelque âge que ce ſoit) la huitiéme partie de ceux qu'elle attaque. Il faudroit ſavoir de plus, ſi l'inoculation emporte toujours, comme on le ſuppoſe, la même partie conſtante des inoculés, à quelque âge qu'on les inocule (*E*).

J'avouerai cependant que s'il n'y avoit que des diffi-

(*E*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

cultés de cette eſpéce, qui empêchaſſent de fixer par le calcul les avantages de l'inoculation, ces difficultés n'auroient lieu, que vu l'imperfection actuelle de nos connoiſſances ſur cette matiere, & le petit nombre d'obſervations certaines qu'on a recueillies juſqu'à préſent. En formant avec le tems des tables éxactes de ceux qui prennent la petite Vérole à chaque âge, de ceux qui en meurent, & du ſort des inoculés, on parviendroit dans la ſuite à une connoiſſance préciſe de la mortalité du genre humain, dans l'hypothèſe qu'on laiſſe agir la petite Vérole naturelle, & dans l'hypothèſe de l'inoculation; & on auroit la différence de mortalité dans les deux cas.

Mais qu'apprendra-t-on par cette différence de mortalité? On apprendra, je le veux, que *la vie moyenne* de ceux qui ſe font inoculer, c'eſt-à-dire, le tems que chacun d'eux peut raiſonnablement eſpérer de vivre après avoir ſubi l'inoculation, ſurpaſſe la vie moyenne de ceux du même âge qui prennent le parti d'attendre la petite Vérole; on déterminera, pour chaque âge, de combien la vie moyenne dans le premier cas eſt plus grande que dans le ſecond; & par conſéquent on aura, en comparant ces deux riſques, le tems qu'on peut eſpérer d'ajouter à ſa vie en ſe faiſant inoculer.

Or cette connoiſſance ne me paroît pas ſuffire pour fixer d'une maniere ſatisfaiſante les avantages de l'inoculation. Afin de me faire mieux entendre, j'appliquerai à un exemple le raiſonnement que je vais faire. Je ſuppoſe

ſuppoſe que la vie moyenne d'un homme de trente ans, ſoit trente autres années, c'eſt-à-dire, que, ſuivant les tables de mortalité connues, il puiſſe raiſonnablement eſpérer de vivre encore trente ans, en s'abandonnant à la nature, & en ne ſe faiſant point inoculer. Je ſuppoſe enſuite, qu'en ſe ſoumettant à cette opération, ſa vie moyenne ſoit de 34 ans (*F*), c'eſt-à-dire, de quatre ans de plus que s'il attendoit la petite Vérole. Je ſuppoſe enfin, avec M. Bernoulli, que le riſque de mourir de l'inoculation ſoit de 1 ſur 200. Cela poſé, il me ſemble que pour apprétier l'avantage de l'inoculation, il faut comparer, non la vie moyenne de 34 ans à la vie moyenne de trente; mais le riſque de 1 ſur 200, auquel on s'expoſe de mourir en un mois par l'inoculation (& cela à l'âge de trente ans, dans la force de la ſanté & de la jeuneſſe), à l'avantage éloigné de vivre quatre ans de plus au bout de ſoixante ans, lorſqu'on ſera beaucoup moins en état de jouir de la vie.

En un mot, ſi on admet les ſuppoſitions précédentes, celui qui ſe fait inoculer, eſt à-peu-près dans le cas d'un Joueur, qui riſque un contre deux-cens de perdre tout ſon bien dans la journée, pour l'eſpérance d'ajouter à ce bien une ſomme inconnue & même aſſez petite, au bout d'un nombre d'années fort éloigné, & lorſqu'il ſera beaucoup moins ſenſible à la jouiſſance de cette augmentation de fortune. Or comment comparer ce riſque préſent à cet

(*F*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

avantage inconnu & éloigné ? C'eſt ſur quoi l'Analyſe des probabilités ne peut rien nous apprendre. Toutes les régles de cet Analyſe n'enſeignent qu'à comparer un riſque préſent ou proche, à un avantage également préſent ou proche, & non un riſque préſent à un avantage qui diminue par ſa diſtance même, ſans qu'on puiſſe eſtimer au juſte, ni même à-peu-près, ſuivant quelle loi ſe fait cette diminution (G).

Voilà, il n'en faut point douter, ce qui rend tant de perſonnes, & ſur-tout tant de meres, peu favorables parmi nous à l'inoculation. Le raiſonnement que nous venons de développer, elles le font implicitement: ſans pouvoir comparer éxactement leur crainte à leur eſpérance, elles prennent acte, ſi on peut parler ainſi, de l'aveu que font les Inoculateurs, qu'on peut mourir de la petite Vérole artificielle; elles voyent l'inoculation comme un péril inſtant & prochain de perdre la vie en un mois, & la petite Vérole comme un danger incertain, & dont on ne peut aſſigner la place dans le cours d'une longue vie. Ne pouvant donc faire un parallèle éxact des deux riſques, & en fixer le rapport, la préſence du premier les frappe plus que la grandeur incertaine du ſecond; & l'on ſait combien la préſence ou la proximité d'un danger qu'on craint, ou d'un avantage qu'on eſpere, a de poids pour déterminer la multitude. Jouir du préſent, & s'inquiéter peu de l'avenir, voilà la Logique

(G) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

commune; Logique moitié bonne, moitié mauvaise, dont il ne faut pas eſpérer que les hommes ſe corrigent.

Pour rendre encore plus ſenſible l'impoſſibilité d'appliquer à cette matiere d'une maniere préciſe le calcul des probabilités, & pour développer même les ſophiſmes qu'on pourroit faire à ce ſujet, je joindrai ici le raiſonnement ſuivant, auquel je prie qu'on faſſe attention. Si l'inoculation étoit avantageuſe par cette conſidération ſeule, que la vie moyenne des inoculés eſt plus grande que celle des autres hommes, elle ſeroit d'autant plus avantageuſe, & on devroit être d'autant plus empreſſé de la pratiquer, qu'elle augmenteroit davantage la longueur de la vie moyenne. Or il eſt aiſé d'imaginer une infinité d'hypothèſes, où l'inoculation augmenteroit énormément la vie moyenne, & où néanmoins on ſeroit très-imprudent de ſe ſoumettre à cette opération. Voici, par exemple, un de ces cas. Je ſuppoſerai que la plus longue vie de l'homme ſoit de cent ans; que la petite Vérole ſoit la ſeule maladie mortelle, & que cette maladie enleve tous les ans un nombre égal d'hommes: dans ce cas la vie moyenne de ceux qui attendroient la petite Vérole, ſeroit de cinquante ans, puiſque tous les hommes vivroient chacun cinquante ans, l'un portant l'autre, en ne ſe faiſant point inoculer. Je ſuppoſe enſuite que l'inoculation une fois pratiquée délivre de la petite Vérole pour tout le reſte de la vie; & que par conſéquent les inoculés ſoient ſûrs de vivre cent ans, s'ils échappent

à l'inoculation; mais que cette opération enleve une victime ſur cinq, enſorte qu'il n'en réchappe que les quatre cinquiémes. Cela poſé, il eſt très-aiſé de voir que la vie moyenne de ceux qui ſeront inoculés, ſera les quatre cinquiémes de 100 ans, c'eſt-à-dire, de 80 ans, & par conſéquent de 30 années plus grande que la vie moyenne de ceux qui s'abandonneront à la nature. Si donc on appliquoit à cette hypothèſe le raiſonnement fondé ſur l'augmentation de la vie moyenne des inoculés, on en concluroit que dans le cas préſent l'inoculation ſeroit très-avantageuſe. Cependant je doute que dans ce même cas perſonne voulût prendre le parti de ſe faire inoculer; par la raiſon, que le riſque de mourir de l'inoculation étant un danger inſtant & préſent, & ſe trouvant d'un contre quatre, eſt plus que ſuffiſant pour balancer la certitude de vivre cent ans, après avoir échappé à cette opération. Envain répondroit-on que nous avons fait une ſuppoſition arbitraire, qui n'a point lieu dans l'état actuel de la vie des hommes. Cette ſuppoſition ſuffit pour l'objet que nous nous ſommes propoſé, pour montrer que l'augmentation de la vie moyenne des inoculés n'eſt pas un argument ſuffiſant en faveur de l'inoculation; car encore une fois, ſi ce principe étoit juſte, il ſeroit applicable à toutes ſortes d'hypothèſes, ſur-tout à celles où la vie moyenne des inoculés ſeroit conſidérablement plus grande que la vie moyenne de ceux qui ne le ſont pas. Dans le cas imaginaire que nous avons pris, le riſque de mourir de l'inoculation eſt

très-grand, mais la vie moyenne eſt prodigieuſement augmentée; dans le cas réel, le riſque eſt ſans doute beaucoup moindre, mais l'augmentation de la vie moyenne eſt beaucoup moindre auſſi. Ce n'eſt donc ni la longueur ſeule de la vie moyenne, ni la ſeule petiteſſe du riſque, qui doit déterminer à admettre l'inoculation; c'eſt uniquement le rapport entre le riſque d'une part, & de l'autre l'augmentation de la vie moyenne, ou plutôt l'avantage que doit procurer cette augmentation relativement au tems & à l'âge où l'on en doit jouir. Or la difficulté eſt de fixer ce rapport.

La ſuppoſition que nous avons faite il n'y a qu'un moment, toute gratuite qu'elle eſt, peut conduire encore à une autre conſidération, qu'on n'a pas, ce me ſemble, aſſez faite en cette matiere. On a trop confondu l'intérêt que l'Etat en général peut avoir à l'inoculation, avec celui que les particuliers peuvent y trouver; car ces deux intérêts peuvent être fort différens. Par exemple, dans l'hypothèſe que nous venons de faire, il eſt certain que l'Etat gagneroit à l'inoculation, puiſqu'en ſacrifiant un citoyen ſur cinq, la ſociété ſeroit aſſurée de conſerver ſes autres membres ſains & vigoureux, juſqu'à l'âge de 100 ans; cependant nous venons de voir que dans cette même hypothèſe, il n'y auroit peut-être pas de citoyen aſſez courageux ou aſſez téméraire pour s'expoſer à une opération, où il riſqueroit un contre quatre de perdre la vie. C'eſt que pour chaque individu, l'intérêt de ſa conſervation particuliere eſt le premier de tous;

l'Etat au contraire conſidére tous les citoyens indifféremment ; & en ſacrifiant une victime ſur cinq, il lui importe peu quelle ſera cette victime, pourvû que les quatre autres ſoient conſervées. Or je demande ſi aucun Légiſlateur ſeroit en droit d'obliger les citoyens à l'inoculation, dans la ſuppoſition (d'ailleurs ſi favorable à l'Etat) qu'il en périt un ſur cinq, & que les quatre qui en réchapperoient, fuſſent aſſurés de cent ans de vie ? C'eſt une queſtion digne d'exercer les Arithméticiens politiques ; mais on apprendra du moins par notre hypothèſe, que dans cette matiere délicate, l'intérêt de l'Etat & celui des Particuliers doivent être calculés ſéparément. On ne penſera pas, par exemple, comme le célébre Mathématicien déja cité paroît l'avoir cru, que ſi l'inoculation ne faiſoit périr qu'une victime ſur dix, elle ſeroit encore avantageuſe, par cette ſeule raiſon, qu'elle augmenteroit de quelques jours la vie moyenne (*H*).

Il paroît donc que tous les calculs qu'on a faits juſqu'à préſent, pour déterminer les avantages de l'inoculation, ſont inſuffiſans & prématurés. Mais faut-il conclure de-là que l'inoculation doive être proſcrite ? Je ſuis bien éloigné de le prétendre. Toutes nos objections contre les calculs des Inoculateurs ſe réduiſent à prouver qu'on n'a ni obſervations ni méthodes aſſez éxactes, pour appuyer ſolidement ces calculs, & pour arriver à un réſultat précis & ſatisfaiſant. Mais combien d'occaſions

(*H*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

dans la vie, où ſans ſavoir préciſément l'avantage qu'on peut eſpérer en prenant quelque parti, on eſt déterminé par le ſeul motif que cet avantage peut être très-grand ? Il ne s'agit plus que de ſavoir ſi l'inoculation eſt dans ce cas.

Je ſuppoſerai d'abord, comme je l'ai fait juſqu'ici, d'après les Inoculateurs, que l'inoculation augmente en effet la vie moyenne des hommes ; je reviendrai dans un moment ſur cette ſuppoſition ; admettons-la d'abord pour vraie. Il eſt inconteſtable que dans cette hypothèſe l'inoculation ſeroit avantageuſe, ſi on ne couroit pas quelque riſque de mourir en ſe ſoumettant à cette opération. Si donc ce riſque étoit abſolument nul, ſi tous les inoculés, ſans exception, échappoient à la mort, il n'y a point de citoyen qui dût balancer à ſe faire inoculer. Or quoique l'inoculation ait fait périr quelques victimes, cependant les Inoculateurs aſſurent qu'aucun de ceux qui ont ſubi cette épreuve avec les précautions convenables, n'y a ſuccombé. Des liſtes fidéles, diſent-ils, prouvent que de douze cens inoculés bien choiſis, & traités par la même perſonne dans le même lieu, il n'en eſt pas mort un ſeul. Il ne s'agit donc, ajoutent-ils, que de ſe mettre entre les mains d'un Médecin habile, ſage & expérimenté ; & on peut alors ſe regarder comme ſûr de ſa guériſon.

C'eſt-là, ce me ſemble, le point eſſentiel, auquel les Partiſans de l'inoculation doivent s'attacher ; c'eſt à prouver qu'on n'en meurt point, quand elle eſt pratiquée &

conduite avec prudence; c'eſt à prouver (autant que cela eſt poſſible en Médecine) que le petit nombre d'inoculés qui ont péri juſqu'à préſent, ont été la victime, ou de leur imprudence, ou de celle de leurs guides, ou de quelques accidens particuliers, tout-à-fait étrangers à cette maladie. Il eſt certain, & c'eſt déja un préjugé favorable, que les Médecins ſages qui ont pratiqué cette opération, n'ont juſqu'ici perdu aucun de leurs malades. Ces mêmes Médecins paroiſſent perſuadés que plus ils la pratiqueront, plus il paſſera pour conſtant qu'on n'en meurt jamais, quand elle n'eſt pas faite au hazard. Or dans une matiere qui ne peut être ſuſceptible de démonſtrations rigoureuſes, la grande probabilité du ſuccès eſt un argument ſuffiſant pour ne pas proſcrire, pour encourager même des expériences utiles. C'eſt pourquoi ſi ces Médecins ſe tiennent aſſurés de ne faire périr aucun malade par l'inoculation, on ne ſauroit trop les exhorter à la répandre: c'eſt le moyen le plus ſûr de répondre à la principale objection contre l'inoculation, la crainte d'y ſuccomber: crainte qui aura toujours beaucoup de force ſur le commun des hommes, quelque peu fondée qu'on la ſuppoſe; parce que d'un côté elle a pour objet un danger préſent, & que de l'autre ils ne peuvent comparer avec aſſez de certitude le riſque qu'ils courent à l'avantage qu'ils eſperent.

Allons plus loin. Quand même l'inoculation, faite avec les précautions convenables, emporteroit quelques victimes en très-petit nombre ſur une quantité infiniment plus

plus considérable qui en réchapperoit, ce ne seroit pas encore une raison pour la condamner. En effet, il faut considérer, que la petite Vérole naturelle emporte tous les ans, année commune, une certaine partie du genre humain, & par conséquent aussi une certaine partie tous les mois, c'est-à-dire, dans un espace de tems égal à celui où l'on subit le risque de l'inoculation. Ce nombre de victimes de la petite Vérole naturelle est à Paris d'environ un sur 6000 par mois; c'est-à-dire, que sur 6000 personnes vivantes, prises au hazard & à tout âge, il en meurt une par mois de la petite Vérole (*I*); encore faut-il observer, que des 6000 personnes actuellement vivantes, & de tout âge, dont il meurt une par mois de la petite Vérole naturelle, il y en a un très-grand nombre qui a déja eu la petite Vérole, & qui par conséquent ne doit point être compté parmi les 6000 personnes dont il s'agit. Supposons que ce nombre à retrancher ne soit que de la moitié des 6000; alors le risque de mourir de la petite Vérole en un mois, seroit de $\frac{1}{3000}$ pour tous les âges indifféremment. Il est même certainement plus considérable. Car on peut assurer, quoiqu'on n'ait point encore là-dessus d'observations exactes, que de toutes les personnes actuellement vivantes à tout âge, il y en a beaucoup plus de la moitié qui ont déja payé le tribut à la petite Vérole naturelle (*K*).

(*I*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.
(*K*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

Si donc l'inoculation, qui enleve déja, comme on vient de le voir, ſi peu de perſonnes, ſe perfectionnoit au point de n'en faire périr qu'une ſur trois mille, ou ſur un plus grand nombre, alors la partie du genre humain que la petite Vérole enleve chaque mois, ne ſeroit pas plus petite, ou même ſeroit plus grande que celle qui ſuccomberoit à l'inoculation, ſagement adminiſtrée. En ce cas le danger de cette opération ſeroit réellement & abſolument nul; & perſonne au monde ne devroit craindre de s'y expoſer, ou pour ſoi, ou pour les ſiens; car alors on ne courroit pas plus de riſque, ou même on en courroit moins à ſe donner la petite Vérole, qu'à attendre qu'elle vînt naturellement dans le courant du mois où on ſe feroit inoculer; avec cet avantage de plus, que l'inoculation délivreroit pour le reſte de la vie de la crainte d'une maladie affreuſe & cruelle.

Or ſi 1200 inoculés bien choiſis, & traités avec prudence, ont échappé au danger de l'inoculation, n'y a-t-il pas lieu de croire que 3000 inoculés, choiſis & traités de même, en réchapperoient? On aſſure qu'à Conſtantinople, 10000 perſonnes inoculées avec précaution dans une ſeule année, ont ſubi heureuſement cette épreuve. Quand le fait ſeroit exagéré du triple, c'en ſeroit plus que nous n'en demandons.

Enfin, quand même le riſque de mourir de l'inoculation (ſagement adminiſtrée) ſeroit plus grand que celui de mourir de la petite Vérole naturelle dans le courant du même mois, ce riſque, s'il n'étoit en effet que

de 1 ſur 1200, ſeroit encore plus petit que celui de mourir de la petite Vérole naturelle dans l'eſpace de trois mois. Car, ſuivant le calcul qu'on vient de faire, le nombre de ceux qui meurent à Paris de la petite Vérole, année commune, eſt tout au moins de 1 ſur 3000 en un mois; & par conſéquent de 1 ſur 1000 en trois mois (*a*). Donc le riſque de mourir de la petite Vérole naturelle en trois mois, ſeroit au moins le même, & vraiſemblablement plus grand, que celui de mourir en un mois de l'inoculation. Or riſquer de mourir au bout d'un mois, ou dans l'eſpace de trois, eſt à-peu-près la même choſe pour le commun des hommes. On ne devroit donc pas balancer à préférer celui de ces deux riſques qui délivre de la crainte de la petite Vérole naturelle; par-là on auroit l'avantage de s'aſſurer à la fois une vie plus longue & une plus grande tranquillité; avantage aſſez grand, pour l'emporter ſur la légere probabilité de ſuccomber à l'inoculation, en ne ſacrifiant que deux mois de ſa vie (*L*). Lorſqu'il eſt queſtion d'un avantage, même éloigné, il y a une infinité de cas, ſur-tout dans le cours de la vie, où une probabilité très-petite de danger, qui balance cet avantage, doit être traitée comme ſi elle étoit abſolument nulle. Ce principe, pour le dire en paſſant, eſt très-important dans la théorie des

(*a*) On verra dans les Notes que ce riſque peut être porté, ſans craindre de ſe tromper, à 1 ſur 2500 en un mois; ce qui réduiroit abſolument à rien (dans la ſuppoſition préſente) le danger de l'inoculation.

(*L*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

jeux de hazard : il peut ſervir à réſoudre des queſtions épineuſes & délicates, qui n'ont point été réſolues juſqu'ici, ou qui l'ont été mal, mais qui ne ſont pas de l'objet de ce Mémoire (*M*).

Il ne nous reſte plus qu'à examiner la ſuppoſition que nous avons faite, que l'inoculation augmente la vie moyenne des hommes. Cette ſuppoſition eſt fondée ſur deux autres. 1°. Que l'inoculation garantiſſe de la petite Vérole naturelle. 2°. Que l'inoculation n'emporte après elle aucune autre maladie mortelle ou dangereuſe. Les obſervations, ſelon les Inoculateurs, paroiſſent favorables juſqu'ici à la premiere ſuppoſition, ou du moins n'y paroiſſent pas contraires. On n'a point encore, diſent-ils, un ſeul exemple inconteſtable d'un inoculé qui ait repris la petite Vérole; & il faut avouer au reſte que quand même le cas arriveroit, il pourroit être ſi rare, qu'on ſeroit en droit de le regarder, dans la pratique, comme n'éxiſtant pas (*a*). A l'égard de la ſeconde ſuppoſition, on ne ſauroit, il eſt vrai, démontrer en rigueur, que l'inoculation, en nous délivrant de la petite Vérole, ne nous rende ſuſceptibles d'aucune autre maladie dangereuſe; mais il eſt encore plus vrai qu'on n'a pas de preuve du contraire. Juſqu'ici les inoculés paroiſſent avoir joui d'une auſſi bonne ſanté après cette

(*M*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire. Voyez auſſi le Mémoire précédent *ſur le Calcul des probabilités*.

(*a*) Voyez la Note (*D*) n. 13.

opération, qu'auparavant. Un doute qui n'eſt point appuyé ſur des faits, n'eſt donc point un motif pour rejetter l'inoculation. Ce doute à la vérité ne pourra être entiérement détruit, que quand on ſe ſera aſſuré par l'obſervation de pluſieurs années, que l'inoculation augmente la vie moyenne des citoyens. Mais cette augmentation étant au moins déja très-probable, c'eſt une raiſon pour la conſtater rigoureuſement par l'expérience. Or cela ne ſe pourra faire qu'en pratiquant l'inoculation; en dreſſant des tables éxactes de ceux qui ſe feront inoculer à chaque âge, du petit nombre de ceux qui en mourront, & du nombre de ceux qui meurent à chaque âge de la petite Vérole naturelle.

Concluons de tout ce qui a été dit dans ce Mémoire, que ſi les avantages de l'inoculation ne ſont pas de nature à être apprétiés mathématiquement, il eſt néanmoins vraiſemblable que ces avantages ſont réels pour ceux qui la ſubiront avec les précautions convenables; qu'il faut donc bien ſe garder d'en arrêter ou d'en retarder les progrès; & que c'eſt le ſeul moyen d'acquérir ſur cette matiere importante toutes les lumieres que l'on peut deſirer, pour mettre déſormais l'inoculation à l'abri de toute atteinte. Mes objections n'attaquent que les Mathématiciens qui pourroient trop ſe preſſer de réduire cette matière en équations & en formules; mais je me regarderois comme coupable envers la Société, ſi j'avois eu pour but de diſſuader mes concitoyens d'une pratique que je crois utile.

Il y auroit encore beaucoup d'autres réfléxions (*N*) à faire ſur un ſujet ſi important ; mais il eſt tems de finir cet Ecrit, dans lequel je ne crois pas que les Partiſans ni les Adverſaires de l'inoculation m'accuſent d'avoir marqué la plus légére partialité ; ſes Adverſaires, puiſque j'ai tâché de prouver que les calculs qu'on leur a oppoſés juſqu'à préſent, n'étoient peut-être pas ſuffiſans pour les convaincre ; ſes Partiſans, puiſqu'en partant d'un fait avancé par eux, & qui ne paroît pas leur avoir été conteſté, j'en conclus que l'inoculation mérite d'être encouragée.

(*N*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

Fin du onziéme Mémoire.

NOTES

Sur le Mémoire précédent.

CE Mémoire ayant été fait pour être lû dans une Aſſemblée publique de l'Académie des Sciences, j'ai été obligé de le renfermer dans certaines bornes, & d'en ſupprimer les détails de calcul. Les Notes ſuivantes, qui ſont très-étendues, ſuppléront à ce que je n'ai pû dire dans cet Ecrit.

(*A*) Suivant les Liſtes mortuaires, publiées en Angleterre, il meurt de la petite Vérole $\frac{1}{14}$ des enfans qui naiſſent; à quatre ans il ne reſte plus que la moitié de ces enfans, dont l'autre moitié a péri preſque toute entiere par des maladies de l'enfance, différentes de la petite Vérole. Ainſi c'eſt à-peu-près la ſeptiéme partie du genre humain, que la petite Vérole emporte depuis l'âge de quatre ans, juſqu'à la fin de la vie. Voyez *le Mémoire de M. de la Condamine.*

Au reſte, cette proportion qui paroît avoir été adoptée en Angleterre pour la Ville de Londres, n'eſt pas la même pour toutes les autres Villes. M. Daniel Bernoulli dit qu'à Bâle, dans des Epidémies aſſez malignes de la petite Vérole, il n'en meurt pas un malade ſur 20; ce qui ſeroit conſidérablement au-deſſous de ce qu'il en

meurt à Paris dans des cas ſemblables. M. Bernoulli eſtime qu'à Bâle le nombre de ceux qui meurent de la petite Vérole, eſt tout au plus la douziéme partie de ceux qui en ſont attaqués, & tout au plus la vingtiéme partie de ceux qui meurent; ce qui ſeroit fort au-deſſous du rapport $\frac{1}{7}$ que nous venons de ſuppoſer.

En général, il paroît que la mortalité de la petite Vérole doit être conſidérablement plus forte dans les grandes Villes, que dans les petites; & dans les Villes, que dans les Campagnes. Et ſi l'inoculation faiſoit périr partout à-peu-près une victime ſur 300, elle ſeroit moins avantageuſe, à proportion que la petite Vérole naturelle ſeroit moins dangereuſe. Par exemple, à Bâle, l'avantage (en ſuivant les calculs des Inoculateurs) ne ſeroit plus que dans le rapport de 300 à 20, ou de 15 à 1, beaucoup moindre par conſéquent qu'à Paris. Cependant il eſt vraiſemblable, que moins la petite Vérole ſera dangereuſe dans un Pays, moins l'inoculation le ſera de ſon côté. Il n'y a que des obſervations & des tables éxactes qui puiſſent fixer pleinement nos idées ſur ce ſujet; mais ces obſervations & ces tables nous manquent encore.

(*B*) Les Liſtes de ceux qui ſont morts de l'inoculation varient beaucoup entr'elles. Suivant quelques-unes il eſt mort un inoculé ſur ſoixante; ſuivant d'autres, il n'en eſt pas mort un ſur douze cens. C'eſt en prenant un milieu entre toutes les Liſtes, qu'on a fixé le nombre des morts de l'inoculation, à environ 1 ſur 300; mais il faut avouer

avouer que cette eſtimation eſt très-imparfaite, & cela pour deux raiſons. 1°. Elle a été faite indifféremment ſur toutes les Liſtes de ceux qui ſont morts de l'inoculation, tant après avoir été inoculés au hazard & ſans préparation, qu'après avoir été inoculés avec les précautions convenables. Cette maniere d'évaluer les avantages de l'inoculation eſt peu éxacte. Car ſi on prend les inoculés au hazard, il en meurt bien plus de un ſur 300; & au contraire ſi on les inocule avec précaution, le nombre des victimes paroît être beaucoup moindre. Donc dans le premier cas, la ſuppoſition d'une victime ſur 300 eſt trop favorable à l'inoculation; & dans le ſecond elle lui eſt contraire. Or ce ſecond cas eſt celui que tout Partiſan de l'inoculation, & même que tout Philoſophe raiſonnable doit naturellement ſuppoſer. Car perſonne ne conſeillera l'inoculation à un ſujet mal ſain, ſur-tout s'il n'y eſt pas préparé. Nous faiſons d'avance cette derniere remarque, qui nous ſervira dans la ſuite de ce Mémoire à établir les avantages de l'inoculation, & ſur laquelle il paroît que les Partiſans de cette pratique n'ont pas appuyé, ou ont appuyé trop légérement; en quoi ils ont abandonné, ce me ſemble, leur véritable avantage; & ce qu'il y a de plus déciſif en leur faveur dans cette queſtion.

2°. Une autre raiſon pour laquelle le rapport de 1 à 300 eſt peu éxact, c'eſt que ce rapport eſt ſuppoſé le même pour quelque âge que ce ſoit. Nous ne pouvons à la vérité faire une autre ſuppoſition, faute d'obſer-

vations ſuffiſantes ; mais on ne ſauroit trop exhorter les Inoculateurs à conſtater par des expériences réitérées quel eſt ce rapport pour chaque âge, afin d'arriver là-deſſus à toute la préciſion que le ſujet peut comporter. Quoi qu'il en ſoit, nous partirons du rapport de 1 à 300, ſuppoſé par les Inoculateurs même ; & c'eſt d'après cette ſuppoſition, que nous allons examiner les conſéquences qu'ils en tirent.

(C) 1. Pour fixer les idées, je ſuppoſe que le tems où on eſt ſujet à la petite Vérole, ſoit depuis 5 juſqu'à 65 ans. Je ſai qu'on a ſouvent la petite Vérole plutôt & quelquefois plus tard ; mais il faut remarquer en même tems ; 1°. que ſi on fait commencer le riſque de la petite Vérole au moment de la naiſſance, alors, ſuivant la Note (A) ci-deſſus, on trouvera par les tables de mortalité $\frac{1}{14}$ ſeulement de riſque au lieu de $\frac{1}{7}$; 2°. que ſi on ſuppoſe que le riſque de la petite Vérole s'étende au-delà de 65 ans, alors en prolongeant le tems de ce riſque, on diminue d'autant à proportion le riſque d'en mourir en un mois ; ainſi les deux ſuppoſitions que nous avons faites, tendent à augmenter le riſque de mourir de la petite Vérole, & ſont par conſéquent (à cet égard) favorables aux Inoculateurs ; 3°. enfin on n'inocule guères avant l'âge de 4 à 5 ans ; c'eſt donc de ce point qu'il faut partir pour apprécier les avantages de l'inoculation.

2. Cela poſé, imaginons pour un moment qu'il meure tous les ans un égal nombre de perſonnes de la petite Vérole ; il eſt évident que le riſque d'en mourir dans

l'année, ſera $\frac{1}{7.60}$; & que celui d'en mourir dans le mois, ſera $\frac{1}{7.60.12}$. Donc le riſque de mourir de l'inoculation, eſt à celui de mourir de la petite Vérole (*dans le même tems*) comme $\frac{1}{300}$ eſt à $\frac{1}{420.82}$; c'eſt-à-dire, comme 84 à 5, ou à-peu-près comme 17 à 1. Ce rapport augmenteroit du double, ſi on ſuppoſoit que le riſque de mourir de l'inoculation ne s'étendît qu'à quinze jours ; & ſi on ſuppoſoit encore avec M. Bernoulli, qu'il y a des Villes, comme Bâle, où le riſque $\frac{1}{7}$ ſe réduit à $\frac{1}{20}$, les deux rapports ſeroient entr'eux comme $\frac{1}{300}$ à $\frac{1}{29.60.24}$, ou comme 96 à 1.

3. On auroit tort de nous objecter que nous avons fait une fauſſe hypothèſe, en ſuppoſant qu'il meurt tous les ans un égal nombre de perſonnes de la petite Vérole ; cette ſuppoſition ſans doute eſt peu éxacte, mais nous ne l'avons faite que pour nous expliquer plus aiſément par un exemple. Car dans toute autre hypothèſe, pourvû qu'elle ne ſoit pas trop forcée, on trouvera toujours que le riſque de mourir de l'inoculation en un mois, eſt plus grand que celui de mourir de la petite Vérole *dans le même tems*. Suppoſons, par exemple, que le nombre des morts de la petite Vérole de 5 à 65 ans, ſoit chaque année en progreſſion Arithmétique décroiſſante depuis 5 ans juſqu'à 65, & qu'à 65 ans ce nombre ſoit $= o$; on trouvera que le dernier terme de cette progreſſion étant

ſuppoſé x, on a pour le premier terme $60x$, & pour la ſomme des morts pendant les 60 ans, $(x + 59x) \times \frac{60}{2}$, qui doit être égal à $\frac{1}{7}$; donc $x = \frac{1}{7.30.60}$; d'où il eſt aiſé de voir que le riſque de mourir la premiere année eſt $\frac{1}{420}$, & par conſéquent le premier mois $\frac{1}{12 \times 420}$; que celui de mourir le premier mois de la ſeconde année eſt $\frac{1}{420} \times \frac{59}{60} \times \frac{1}{12}$; que celui de mourir le premier mois de la troiſiéme eſt $\frac{1}{420} \times \frac{58}{60} \times \frac{1}{12}$ &c. & ainſi de ſuite; or chacun de ces riſques eſt fort au-deſſous de $\frac{1}{300}$, qu'on ſuppoſe être le riſque auquel les inoculés s'expoſent.

4. En général, ſuppoſons que le nombre de ceux qui meurent à chaque inſtant de la petite Vérole ſoit du, & qu'on ait $du = A(60 - x)^n dx$, x exprimant un nombre quelconque d'années écoulées depuis 5 ans juſqu'à 65; on aura donc $u = -A\frac{(60-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{A.60^{n+1}}{n+1}$, qui doit être $= \frac{1}{7}$ lorſque $x = 60$; d'où l'on tire $A = \frac{n+1}{7.60^{n+1}}$: donc $du = \frac{n+1.dx}{7.60} \times \left(1 - \frac{x}{60}\right)^n$: quantité qu'on peut prendre pour le nombre de ceux qui meurent de la petite Vérole chaque année à la fin du tems x; en regardant dx comme $= 1$, & comme repréſentant une année de tems. Donc en général le riſque de l'inoculation ſera à celui de mourir de la pe-

tite Vérole (*dans le même tems, c'eſt-à dire en un mois*) comme $\frac{1}{300}$ eſt à $\frac{n+1}{7.60.12} \times \left(1 - \frac{x}{60}\right)^n$; ce rapport ſera la premiere année, comme $\frac{1}{300}$ eſt à $\frac{n+1}{7.60.12}$ à très-peu-près, pourvû que le nombre n ne ſoit pas fort grand; parce que x étant $= 1$, $\left(1 - \frac{x}{60}\right)^n$ eſt à-peu-près égal à l'unité.

Si l'on fait dans cette formule $n = 0$, ou $n = 1$, on retombera dans les deux cas des art. 3 & 4 ci-deſſus. Si au lieu de $\frac{1}{7}$ on prenoit toute autre fraction, par exemple, $\frac{1}{20}$, pour repréſenter le riſque de la petite Vérole naturelle, on trouveroit de même le rapport des deux riſques (*a*).

5. Il faut remarquer cependant, qu'en ſuppoſant toujours $du = A(60 - x)^n dx$, la formule précédente du rapport entre les deux riſques, n'eſt éxacte que pour la premiere année; & que dans les années ſuivantes, il faut, pour connoître le riſque de mourir de la petite Vérole, multiplier ce riſque par $\frac{a}{z}$, a étant le nombre des vivans à l'âge de cinq ans, & z le nombre de ceux qui vivent à $5 + x$ ans, & qui n'ont point encore eu la

(*a*) On pourroit encore ſuppoſer $du = Ac^{-n} dx$, c étant le nombre dont le Logarithme eſt l'unité. Mais comme la véritable loi des du eſt inconnue juſqu'ici, toutes ces hypothèſes ſeroient arbitraires; nous ne voulons ici que faire ſentir par différens exemples, que le riſque de mourir de la petite Vérole naturelle en un mois, eſt plus petit que celui de mourir de l'inoculation.

petite Vérole ; ce qui augmente à la vérité le riſque de mourir de la petite Vérole en un mois, mais non pas au point de le rendre = à $\frac{1}{300}$, qui eſt le riſque de l'inoculation dans ce même tems d'un mois.

6. Par exemple, ſi on ſuppoſe avec M. Daniel Bernoulli, que de 64 perſonnes de même âge qui n'ont point eu la petite Vérole, il en meurt une dans l'année, (ſuppoſition qui paroît néanmoins être trop forte, ſur-tout quand on a paſſé les 30 ans) on aura pour le riſque de mourir de la petite Vérole naturelle en un mois, la fraction $\frac{1}{64 \times 12} = \frac{1}{768} < \frac{1}{300}$.

7. Au reſte, quelque hypothèſe qu'on veuille faire ſur la loi de mortalité de la petite Vérole, il eſt du moins certain, diront les Anti-inoculateurs, que faute d'obſervations & de tables ſuffiſantes, il n'y a aucun mois dans la vie, où on puiſſe être aſſuré qu'on riſquera davantage de mourir de la petite Vérole naturelle, que d'en mourir par l'inoculation ; ainſi, concluront-ils, l'inoculation, à quelque âge que ce ſoit, eſt, ou téméraire, ou tout au moins haſardée. Telle eſt l'objection qu'ils peuvent faire, & qu'on ne nous accuſera pas d'avoir affoiblie.

(D) 1. La raiſon pour laquelle le riſque de mourir en un mois de la petite Vérole naturelle, eſt ſi peu conſidérable, c'eſt par le peu de probabilité qu'on aura la petite Vérole naturelle dans le mois. Car ſi on doit l'avoir, alors le riſque eſt beaucoup plus grand, ſavoir de $\frac{1}{7}$ environ, ſuivant les Inoculateurs ; & ſi on ne doit

pas l'avoir, en ce cas on ſe retrouvera encore le mois ſuivant dans le danger d'avoir la petite Vérole, & d'en mourir. Au contraire, le riſque qu'on court par l'inoculation (à la vérité en un mois) ſuppoſe qu'on a reçu effectivement la petite Vérole, & délivre de ce danger pour le reſte de la vie, lorſqu'une fois on en eſt échappé. Je dis pour le reſte de la vie; car quand il ne ſeroit pas rigoureuſement prouvé que l'inoculation délivre abſolument d'avoir la petite Vérole, au moins il paroît que les inoculés n'ont pas plus à la craindre que ceux qui l'ont déja eûe naturellement. Or nous voyons que ceux qui ont déja eu la petite Vérole naturelle, ne la craignent plus; & les Médecins ſont partagés ſur la queſtion, ſi on a deux fois cette maladie; ce qui prouve au moins que le cas eſt rare.

2. Voilà donc le point de vûe ſous lequel on doit comparer les deux riſques; l'un plus grand (quoiqu'aſſez petit en lui-même) mais ne devant duter qu'un mois ſur tout le cours de la vie; l'autre plus petit, mais devant ſe répéter à chaque mois: le premier de ces riſques ſera nul dès qu'on y aura échappé; le ſecond, dès qu'on y aura échappé, recommencera tout de nouveau, & pourra même aller toujours en augmentant de mois en mois, au moins juſqu'à un certain âge. Ainſi la difficulté Mathématique de la queſtion conſiſte à ſavoir comment on doit comparer ces deux riſques. Le premier (ſuivant les Inoculateurs) eſt $\frac{1}{300}$; & le ſecond eſt formé de la ſomme des riſques qu'on court à chaque mois,

chacun de ces riſques devant pourtant être diminué à raiſon de l'éloignement du tems où chacun des mois eſt placé. Car il eſt clair que ſi $\frac{1}{1200}$, ou toute autre fraction, exprime le riſque de mourir à 40 ans de la petite Vérole en un mois, pour ceux qui ſont parvenus à cet âge; ce riſque ne doit pas être eſtimé $\frac{1}{1200}$ quand on l'enviſage long-tems avant l'âge de 40 ans, par exemple, à l'âge de 5 ans; ſur-tout quand on compare ce riſque au riſque $\frac{1}{300}$ de mourir de l'inoculation en un mois; parce que le riſque $\frac{1}{300}$ eſt un riſque préſent & *inſtant* de perdre la vie en un mois, & que le riſque $\frac{1}{1200}$ eſt un riſque éloigné, & que l'on ne doit courir qu'après avoir vêcu 35 ans, c'eſt-à-dire, après avoir profité des plus belles années de la vie. En un mot, le riſque de périr de l'inoculation, quelque petit qu'il ſoit, eſt un danger *préſent*, & le riſque de mourir de la petite Vérole naturelle (quoique plus grand) eſt un danger *éloigné*, qui ſe répand ſur tout le tems de la vie, & dont les différentes parties s'affoibliſſent par degrés, en ſe répandant ſur cet eſpace. Or par quelle méthode réduire ce dernier riſque en calcul? Comment en apprétier les différentes parties, & comment en évaluer la ſomme?

3. La ſeule maniere dont il paroît qu'on puiſſe comparer les deux riſques, eſt celle-ci. On conſidere la vie comme une loterie, d'où il ſort un certain nombre de lots qui portent la mort; les inoculés mettent à cette loterie un billet de plus que les autres hommes; en conſéquence de ce billet le lot de la mort peut ſortir pour

pour eux dans l'eſpace d'un mois; mais ce mois paſſé, le lot de la mort doit ſortir plus tard pour eux, que pour ceux qui n'ont point mis ce billet. Or on demande quel eſt l'avantage des Joueurs à cette loterie, ou quel eſt le rapport de l'eſpérance des Joueurs qui n'ont point mis le billet, à l'eſpérance des Joueurs qui l'ont mis? Je vais tâcher de donner dans la théorie ſuivante la ſeule réponſe qu'on puiſſe faire à cette queſtion; & je ne diſſimulerai point en même-tems ce que l'on peut encore deſirer dans cette théorie, pour en être pleinement ſatisfait.

THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'INOCULATION.

4. Soit AO (*fig.* 1.) une ligne indéfinie, qu'on ſuppoſe diviſée en un nombre indéfini de parties très-petites AB, BC, CD &c. dont chacune repréſente une année. Suppoſons de plus qu'au point K, on éleve une perpendiculaire AK, qui repréſente le nombre de perſonnes qui naiſſent en même-tems dans un même lieu, & principalement dans une grande Ville, telle que Paris, Londres &c. Quand je dis *en même-tems*, je n'entends point par ce mot le même inſtant de tems pris rigoureuſement, mais un eſpace de tems aſſez court, par exemple, celui d'une année : car on peut ſuppoſer ſans erreur ſenſible, que s'il naît, par exemple, 20000 perſonnes par an à Paris, ces 20000 perſonnes naiſſent tout-à-la-

fois au commencement de l'année. Mais pour nous exprimer d'une maniere encore plus générale & plus éxacte, nous ſuppoſerons que AK repréſente en général un nombre donné de perſonnes, toutes du même âge, & vivantes au commencement A du tems indéfini AO.

5. Soit AR une portion de la ligne indéfinie AO, laquelle portion AR repréſente un certain nombre n d'années, enſorte que $AR = nAB$; ſuppoſons de plus qu'à la fin du tems AR, le nombre de perſonnes qui exiſtent encore, & qui reſtent de la quantité AK qu'il y en avoit au commencement du tems AR, ſoit repréſenté par RE; & imaginons qu'à chaque point R de la ligne AO, on éleve de pareilles lignes RE, qui repréſentent le nombre d'hommes reſtant: il eſt évident; 1°. qu'on formera par ce moyen une courbe KEQ qui ira rencontrer la ligne indéfinie AO en un point Q, & que $\frac{AQ}{AB}$ exprimera le tems à la fin duquel les perſonnes dont le nombre eſt repréſenté par AK, & qui exiſtent en même tems, ſeront toutes mortes, ſans qu'il en reſte une ſeule; 2°. que toutes les perſonnes vivantes à la fois à la fin d'un tems quelconque AR, & dont le nombre eſt repréſenté par l'ordonnée RE, ſeront du même âge; 3°. que puiſque pendant l'eſpace de tems Rr, qu'on peut ſuppoſer d'une année, le nombre des vivans RE de même âge eſt diminué de la quantité Ee, le nombre des vivans de ce même âge, s'il étoit RF, ſeroit diminué pendant le même tems Rr d'une quantité $Fφ = \frac{Ee \times RF}{RE}$.

6. Imaginons maintenant par le point K la ligne KN indéfinie & parallèle à AO; & sur cette ligne élevons à chaque point G des perpendiculaires GH, marquant le nombre de personnes qui meurent de la seule petite Vérole pendant le tems AR, & qui par conséquent n'existent plus à la fin de ce tems AR par le ravage de cette seule maladie. Il est aisé de voir; 1°. qu'on formera par ce moyen une courbe KHL; 2°. que comme il est rare d'avoir la petite Vérole dans un âge avancé, par exemple, à 60 ans, si on prend $AM = 60\,AB$, la partie LS de cette courbe KHL, qui commence au point L, sera sensiblement parallèle à l'axe, & pourra même lui être absolument parallèle, si AM exprime un âge auquel personne n'a plus la petite Vérole, comme 70 ou 75 ans, plus ou moins; 3°. que si on mene HT parallèle à KN, les ordonnées LV représenteront le nombre de personnes mortes de la seule petite Vérole pendant le tems RM; & que par conséquent Xx représentera ce qui meurt de la seule petite Vérole pendant le tems Rr.

7. Cela posé, soit $AK = k$; $AR = x$; $RE = y$; $GH = u$; on voit d'abord que si toutes les personnes existantes à la fois au commencement A du tems AR, avoient eû la petite Vérole auparavant, il en périroit un moindre nombre pendant le tems AR, puisque l'une des causes de mort, savoir la petite Vérole, n'existeroit plus, ou du moins ne causeroit plus que très-peu de morts; (Voyez cette Note D art. 1.) Ainsi à la fin du tems AR, le nombre des personnes de même âge qui vivroient

encore, ſeroit plus grand que RE. Suppoſons ce nombre $= RF = z$; il eſt évident, 1°. que $E\epsilon$ repréſentant la quantité dont le nombre RE eſt diminué pendant le tems Rr, tant par la petite Vérole, que par d'autres maladies, $F\varphi = \frac{E\epsilon \times FR}{RE}$ repréſenteroit la quantité dont le nombre RF des perſonnes du même âge ſeroit diminué durant le même tems, *toutes choſes d'ailleurs égales*; 2°. que ſi les perſonnes dont le nombre eſt repréſenté par RF étoient ſujettes à la petite Vérole, cette maladie en feroit périr pendant le tems Rr la quantité $X\xi = \frac{X\varkappa \times RF}{RE}$. Mais comme on ſuppoſe que toutes les perſonnes dont le nombre eſt repréſenté par RF, ont eû la petite Vérole, le nombre $F\varphi$ qui devroit mourir dans le tems Rr, ſoit de la petite Vérole, ſoit autrement, doit être diminué de la quantité $fz = X\xi$, qui exprime ce qui périroit par la petite Vérole ſeule. C'eſt pourquoi on trouvera $RF - rz$ ou $dz = \frac{E\epsilon \times RF}{RE} - X\xi = \frac{z\,dx}{x} + \frac{z\,du}{x}$; je mets $+\frac{z\,du}{x}$, & non $-\frac{z\,du}{x}$, parce que z & y diminuent pendant que u croît.

8. On aura donc $dz = \frac{z\,dy}{y} + \frac{z\,du}{y}$; dont l'intégrale eſt $z = y\,c^{\int \frac{du}{y}}$; c exprimant le nombre dont le Logarithme eſt l'unité. On voit par cette équation;

1°. que z eſt toujours plus grand que y, excepté lorſque $y = k$, & lorſque $y = o$; car dans le premier cas $\int \frac{du}{y} = o$, & par conſéquent $z = y$; & dans le ſecond, $z = o$ auſſi-bien que y; 2°. que vers l'extrémité de AQ, par exemple, au point M, où la courbe KLS dégénére en une partie LS, qui eſt exactement ou ſenſiblement parallèle à l'axe, on a $c^{\int \frac{du}{y}}$ = à un nombre conſtant, ou éxactement, ou à très-peu-près; de ſorte que z eſt pour lors en raiſon conſtante, ou à-très-peu-près conſtante avec y.

9. De-là il eſt évident; 1°. que ſi toutes les perſonnes qui exiſtent en même-tems en nombre AK au commencement du tems AR, ont eu la petite Vérole, enſorte qu'elles n'ayent plus ou preſque plus à la craindre, le nombre RF qui en reſtera à la fin du tems AR, ſera plus grand que ſi ces mêmes perſonnes avoïent la petite Vérole à craindre, & ſera plus grand dans le rapport du nombre $c^{\int \frac{du}{y}}$ à l'unité; 2°. qu'à la fin du tems AQ, les perſonnes dont le nombre eſt repréſenté par AK, ſeront toutes mortes, ſoit qu'elles n'ayent pas eu la petite Vérole avant le commencement A du tems AQ, ſoit qu'elles l'ayent eûe.

10. C'eſt pourquoi ſi de 20000 perſonnes, par exemple, qui naiſſent ou qui exiſtent en même-tems au même âge, il n'en exiſte plus une ſeule au bout d'un certain

nombre n d'années, il n'en exiſtera pas non plus une ſeule au bout de ce même nombre d'années, quand même ces perſonnes auroient eû toutes la petite Vérole avant le commencement de ce nombre n d'années. Il ne faut pas cependant conclure de-là que tout ſoit égal dans les deux cas. Car 1°. comme la courbe KFQ eſt toute extérieure à la courbe KEQ, la *vie moyenne* de toutes les perſonnes AK qui exiſtent en même-tems & au même âge, ſera dans le premier cas égale à l'aire $AKEQ$ diviſée par AK, & dans le ſecond égale à l'aire $AKFQ$ diviſée par AK. Ainſi dans le premier cas la vie moyenne ſera plus courte que dans le ſecond, en raiſon de $AKEQ$ à $AKFQ$; c'eſt-à-dire, de $\int y\,dx$ à $\int y\,dx\,c^{\int \frac{dn}{y}}$, en prenant ces intégrales pour ce qu'elles ſont au point Q. 2°. Si RE & $R'F'$ (*fig.* 2.) ſont faites égales à la moitié de AK, les abſciſſes correſpondantes AR, AR' repréſenteront les tems au bout deſquels dans les deux cas le nombre AK des perſonnes vivantes au même âge ſera réduit éxactement à la moitié, & par conſéquent le tems que chacune des perſonnes AK en particulier peut raiſonnablement eſpérer de vivre; donc puiſque $AR < AR'$, ce tems ſera plus petit dans le premier cas que dans le ſecond. C'eſt pourquoi ſi toutes les perſonnes repréſentées par AK, & de même âge, ont eu la petite Vérole au commencement du tems AQ, leur vie moyenne en ſera plus longue, & chacune d'elles pourra eſpérer de vivre plus long-tems, que ſi ces perſonnes AK

avoient encore la petite Vérole à craindre ; quoiqu'à la fin du tems AQ toutes ſoient mortes dans les deux cas.

11. Je ſuppoſe préſentement que parmi le nombre AK de perſonnes exiſtantes au même âge, AK' (*fig.* 3.) repréſente toutes celles qui n'ont point eu la petite Vérole, ou un nombre quelconque d'entr'elles. Il eſt d'abord évident qu'en traçant la courbe $K'F'Q$, qui ſoit telle que RF' ſoit à RF comme AK eſt AK', cette courbe exprimeroit la mortalité des perſonnes AK', en ſuppoſant qu'elles euſſent toutes eu la petite Vérole. Donc ſi on les inocule toutes, & qu'il en ſurvive la partie Ak', alors traçant la courbe $k'f'Q$, qui ſoit telle que Rf' ſoit à RF comme Ak' eſt à AK; cette courbe $k'f'Q$ exprimera la mortalité des inoculés. Donc la vie moyenne des inoculés AK' ſera repréſentée par l'aire $\frac{Ak'f'Q}{AK'} = \frac{AKFQ}{AK} \times \frac{Ak'}{AK'}$; & ſi on fait $A\Lambda = \frac{AK'}{2}$, & $R'O = A\Lambda$, AR' marquera le tems que les inoculés AK' peuvent raiſonnablement eſpérer de vivre.

12. Il s'agit à préſent de ſavoir quelle ſeroit la mortalité des perſonnes AK' (dont on ſuppoſe qu'aucune n'a eu la petite Vérole) ſi toutes ces perſonnes s'abandonnoient à la nature. Il eſt d'abord évident que cette mortalité ſera la même (c'eſt-à-dire, que le nombre des ſurvivans après un tems quelconque, ſera dans le même rapport avec AK') ſoit que le nombre AK' repréſente toutes les perſonnes qui n'ont point eu la petite Vérole ſur le nombre AK des vivans au même âge, ſoit qu'il

n'en repréſente qu'une partie. Suppoſons donc que AK' repréſente toutes les perſonnes de même âge, & habitantes d'un même lieu, qui n'ont point eu la petite Vérole; & que $K'EQ$ (*fig.* 4.) ſoit leur courbe de mortalité. Soit $RE' = u'$ le nombre de perſonnes reſtantes après le tems AR ſur le nombre AK' de ceux qui n'ont point encore eu la petite Vérole à l'inſtant A; il eſt clair d'abord que ſi toutes les perſonnes u' avoient eû la petite Vérole, on auroit $-du' = -\frac{u'dz}{z}$, pour le nombre de perſonnes qui mourroient pendant le petit tems dt; à quoi il faut ajouter le nombre $+du$ de ceux qui meurent dans ce même-tems de la petite Vérole. Donc $-du' = -\frac{u'dz}{z} + du$; or on a trouvé plus haut (n. 8.) $dz = \frac{zdy}{y} + \frac{zdu}{y}$, ou $-dy = -\frac{ydz}{z} + du$; donc $\frac{dy - du'}{y - u'} = \frac{dz}{z}$; ou $y - u' = Pz$; P exprimant une conſtante. Or au point A, on a $z = y = k$ (en ſuppoſant $AK = k$); donc ſi on appelle k' la valeur de u' au point A, on aura $k - k' = Pk$; donc $P = 1 - \frac{k'}{k}$; donc $y - u' = z\left(1 - \frac{k'}{k}\right) = yc^{\int \frac{du}{y}} \times \left(1 - \frac{k'}{k}\right)$; & $u' = y - yc^{\int \frac{du}{y}} + \frac{yc^{\int \frac{du}{y}} \times k'}{k}$. Il ne s'agit plus que de ſavoir quelle

quelle eſt la valeur de k', ou le rapport de k' à k.

13. A cet effet, ſoit n un nombre quelconque de perſonnes vivantes à un certain âge donné; on peut ſavoir aſſez facilement (au moins à-peu-près) quel eſt parmi elles le nombre m de celles qui ont eu la petite Vérole; pour cela il ſuffiroit que quelques perſonnes zélées & eclairées, ſe chargeaſſent de faire là-deſſus des informations, & d'en dreſſer des tables. Donc $\frac{k'}{k} = \frac{n-m}{n}$; & $u' = y - \frac{y\, c^{\int \frac{du}{y}\, m}}{n}$. Suppoſant donc qu'on ait pour chaque âge la valeur de $\frac{m}{n}$; on aura la courbe de mortalité $K'E'Q$ d'un nombre quelconque AK' de perſonnes qui n'ont point eu la petite Vérole; on connoîtra la valeur de leur vie moyenne $= \int \frac{u'\,dx}{AK'} = \int \frac{y\,dx}{k} \times \frac{n}{n-m} - \int \frac{y\,dx\, c^{\int \frac{du}{y}\, m}}{k(n-m)}$. Pour connoître de même le tems $A\rho$ que chacune des perſonnes AK' peut raiſonnablement eſpérer de vivre, on fera $A\Lambda = \frac{AK'}{2}$, & on cherchera l'abſciſſe $A\rho$ correſpondante à $\rho O' = A\Lambda$.

14. Ainſi (*fig.* 3.) le rapport des vies moyennes ſera pour les inoculés, & pour ceux qui ne le ſont pas, celui de $\int \frac{z\,dx}{k} \times \frac{Ak'}{AK'}$, à $\frac{n\int y\,dx}{k(n-m)} - \frac{m\int z\,dx}{k(n-m)}$. Donc

ſuppoſant $z = y + \omega$, on voit que la vie moyenne $\int \frac{y\,dx}{k}$, de toutes les perſonnes d'un même âge, priſes indiſtinctement (telle qu'on la trouve dans les tables déja calculées) ſera augmentée par l'inoculation à-très-peu-près de $\int \frac{\omega\,dx}{k} \times \frac{Ak'}{AK'}$; & qu'elle ſera diminuée par le riſque de la petite Vérole naturelle, d'une quantité $\frac{m\int \omega\,dx}{k(n-m)}$. Donc 1°. $\int \frac{y\,dx}{k}$ exprimant la vie moyenne marquée dans les tables juſqu'ici connues, $\int \frac{y\,dx}{k} - \frac{m\int \omega\,dx}{k(n-m)}$ ſera la vie moyenne de ceux qui n'ont point eu la petite Vérole; 2°. $\left(\frac{\int y\,dx}{k} + \frac{\int \omega\,dx}{k}\right) \times \frac{Ak'}{AK'}$, ſera la vie moyenne des inoculés; 3°. par conſéquent l'augmentation totale de vie moyenne, qu'on ſe procure par l'inoculation, lorſqu'on n'a point encore eu la petite Vérole, ſera $\left(\frac{\int \omega\,dx}{k}\right) \times \left[\frac{Ak'}{AK'} + \frac{m}{n-m}\right] - \int \frac{y\,dx}{k} \times \left(1 - \frac{Ak'}{AK'}\right)$. De plus le rapport des tems qu'on peut eſpérer de vivre dans les deux cas, ſera celui de AR' (*fig.* 3.) à Ar (*fig.* 4.).

15. J'ai ſuppoſé dans les calculs précédens, que d'un nombre quelconque AK' (*fig.* 3.) de perſonnes du même âge, qu'on inocule à l'inſtant A, il en meurt à cet inſtant A la partie $K'k'$; & cette ſuppoſition n'eſt pas rigoureu-

sement éxacte : car ce nombre $K'k'$ ne meurt que pendant un certain tems, qui est d'environ un mois, ou, si l'on aime mieux, de 15 jours. C'est pourquoi ce n'est pas l'ordonnée AK' qu'il faut diminuer de la quantité $K'k'$, mais une autre ordonnée de la courbe $K'F'Q$ qui répond à une abscisse égale à un mois. Or soit μ cette ordonnée ; il est visible qu'en la diminuant de la quantité $K'k'$, c'est la même chose que si on diminuoit l'ordonnée AK' d'une quantité $= \frac{AK' \cdot K'k'}{\mu}$; mais comme μ differe très-peu de AK', il s'ensuit qu'on pourra mettre sans erreur sensible $K'k'$ au lieu de $\frac{AK' \cdot K'k'}{\mu}$. Une plus grande éxactitude seroit superflue dans un calcul tel que celui-ci, où il ne s'agit, & où il n'est possible d'arriver qu'à des *à-peu-près*.

16. Pour trouver les valeurs de AR', Ap (*fig.* 3. & 4.), il faut supposer d'abord que l'on connoisse par des tables de mortalité le nombre de personnes $K'k'$ qui meurent de l'inoculation, sur un nombre donné AK' de personnes du même âge qu'on inocule : ce nombre, toujours très-petit, ne doit pas vraisemblablement être le même pour chaque âge ; c'est-à-dire, que le rapport de $K'k'$ à AK' ne doit pas être constant ; c'est sur quoi on n'a pas encore d'observations suffisantes. Cela posé,

17. On prendra d'abord le nombre AK des enfans qui naissent dans une même année : on saura par les tables de mortalité, combien il meurt de ces enfans par an ;

& on formera par ce moyen une table, dont la premiere colonne verticale contiendra les différentes valeurs de l'abſciſſe x ou AR (*fig.* 1.), depuis o juſqu'à 90 ou 95 ans. La ſeconde contiendra les valeurs de y ou RE, c'eſt-à-dire, le nombre des perſonnes reſtantes à la fin de chaque tems AR. Une troiſiéme colomne verticale contiendra les valeurs de u ou GH, c'eſt-à-dire, le nombre de perſonnes que la petite Vérole a emportées pendant les tems AR (*a*). Une quatriéme colomne contiendra les quantités correſpondantes $\int \frac{du}{y}$, qu'il faudra multiplier par la ſoutangente $o,434294$ de la Logarithmique des tables; j'appelle ces quantités ainſi multipliées ζ. Pour avoir les quantités z, on ajoutera les Logarithmes des y avec les quantités correſpondantes ζ, & les quantités z ſeront celles qui auront pour Logarithmes $\zeta + \text{Log. } y$. On écrira ces quantités z dans une cinquiéme colomne. Dans une ſixiéme colomne on mettra les valeurs de $c^{\int \frac{du}{y}}$, ou de $\frac{z}{y}$. Une ſeptiéme co-

(*a*) Il eſt vrai que ces valeurs de GH ne ſont point encore connues par les Tables de mortalité; mais il ſeroit facile, pour peu que le Gouvernement voulût ſe prêter à cette recherche utile, de former en 15 ou 20 ans des Regiſtres Mortuaires, d'après leſquels on dreſſeroit fort aiſément de pareilles tables; & comme ces tables ſi néceſſaires à la queſtion préſente, n'exiſtent pas encore, c'eſt une raiſon de plus pour eſpérer qu'on y penſera. Car ſans ce ſecours, on n'aura jamais que des calculs imparfaits & fautifs ſur les avantages de l'inoculation.

lomne marquera pour chaque âge le rapport de m à n, & une huitiéme celui de $n - m$ à n. La neuviéme colomne donnera le rapport de $K'k'$ à AK' (*fig.* 3.) pour chaque âge; c'eſt-à-dire, le rapport du nombre des morts de l'inoculation au nombre des inoculés. La dixiéme colomne ſera la valeur de $\int \frac{y\,dx}{k}$, c'eſt-à-dire, la vie moyenne propre à chaque âge, avant ou après la petite Vérole. La onziéme, la valeur de $\int \frac{z\,dx}{k} \times \frac{Ak'}{AK'}$, c'eſt-à-dire, la vie moyenne des inoculés. La treiziéme, le tems AR' que les inoculés peuvent eſpérer de vivre. La quatorziéme, la vie moyenne $\int \frac{u'\,dx}{k'} = \int \frac{y\,dx}{k} \times \frac{n}{n-m} - \int \frac{y\,dx\, c^{\int \frac{du}{y}}}{k(n-m)}{}^{m} = \int \frac{y\,dx}{k} \times \frac{n}{n-m} - \int \frac{mz\,dx}{k(n-m)}$, de ceux qui n'ont pas eu la petite Vérole; ou, ſi l'on veut, la quantité $\frac{m\int \omega\,dx}{k(n-m)}$, dont leur vie moyenne eſt plus courte que la vie moyenne générale $\int \frac{y\,dx}{k}$ de toutes les perſonnes du même âge, priſes indiſtinctement. La quinziéme enfin, le tems Ap (*fig.* 4.) qu'ils peuvent raiſonnablement eſpérer de vivre, c'eſt-à-dire, celui où ils ſeront réduits à la moitié; on aura ainſi pour chaque âge le rapport de AR' (*fig.* 3.) à Ap (*fig.* 4.).

18. Voilà tout ce que la théorie Mathématique peut

nous apprendre sur cette question ; encore faut-il supposer qu'on ait par une bonne suite d'observations la valeur des u, celle de $\frac{m}{n}$ pour chaque âge, & celle de $\frac{K'k'}{AK'}$ aussi pour chaque âge. Jusqu'à ce qu'on connoisse ces valeurs, il ne sera pas possible de rien établir de certain sur l'augmentation de vie moyenne que l'inoculation procure à quelque âge que ce soit.

19. On peut remarquer seulement; 1°. que la quantité $\frac{m}{n}$ augmente à mesure qu'on avance en âge, & que par conséquent la quantité exprimée par le rapport $\frac{m}{n-m}$, augmente continuellement; 2°. qu'au contraire la quantité $\int \omega\, dx = \int (z-y)\, dx$, va en diminuant, ainsi que la quantité k; 3°. que l'expérience seule peut par conséquent décider dans quel cas la diminution $\frac{m\int \omega\, dx}{k(n-m)}$ de la vie moyenne, pour ceux qui n'ont pas eu la petite Vérole, sera la plus grande qu'il est possible; 4°. que pour connoître les quantités u & $\frac{m}{n}$, & par conséquent celles qui en dépendent, il n'est pas nécessaire d'avoir des observations particulieres pour chaque âge ; il suffit d'en avoir pour cinq ou six âges différens ; & on déterminera à-très peu-près les valeurs correspondantes aux autres âges par la méthode connue des *interpolations*, & des courbes de *genre parabolique* ; 5°. que la diminution de la vie moyenne par le risque de la petite

Vérole naturelle, & ſon augmentation par l'inoculation, ſont différentes, quand on ne prend que ceux qui attendent la petite Vérole, & quand on prend le total des perſonnes vivantes à chaque âge; & que la diminution dans le ſecond cas eſt différente de ce qu'elle eſt dans le premier, ainſi que l'augmentation. Le premier cas eſt celui qui intéreſſe chaque particulier à part; le ſecond cas eſt celui qui intéreſſe la totalité de l'Etat. Ainſi les calculs doivent être différens pour les deux cas. Dans le premier cas, la diminution de la vie moyenne eſt $\int \frac{\omega\, dx}{k} \times \frac{m}{n-m}$; dans le ſecond cas elle eſt $=$ $\int \frac{\omega\, dx}{k}$; dans le premier cas, l'augmentation de vie moyenne par l'inoculation eſt $\int \frac{\omega\, dx}{k} \times \frac{Ak'}{AK'} - \int \frac{y\, dx}{k}\left(1 - \frac{Ak'}{AK'}\right) + \int \frac{\omega\, dx}{k} \times \frac{m}{n-m} = \int \frac{\omega\, dx}{k} + \int \frac{\omega\, dx}{k} \times \frac{m}{n-m} - \int \frac{\zeta\, dx}{k}\left(\frac{AK' - Ak'}{AK'}\right)$; dans le ſecond l'augmentation eſt $\int \frac{\omega\, dx}{k} - \int \frac{\zeta\, dx}{k} \times \left(\frac{AK' - Ak'}{AK}\right)$: donc excepté le cas de $m = o$ & de $AK = AK'$, l'augmentation eſt différente dans les deux cas; & la diminution auſſi, excepté le cas de $n = 2m$.

20. On peut encore remarquer; 1°. que l'aire de la courbe de mortalité KEQ (*fig.* 1.) repréſente à-peu-près le nombre des Habitans d'un même lieu, en poſant que le nombre de ceux qui en ſortent, ſoit à-peu-

près égal au nombre de ceux qui y entrent; car il naît chaque année un nombre d'enfans $= AK$, & il meurt une quantité de perſonnes $= \int dy = AK$; 2°. Donc le nombre total des vivans eſt $= AK$ multiplié par la vie moyenne. 3°. Par la même raiſon le nombre des vivans depuis un âge quelconque AR juſqu'à l'âge AQ, eſt $= RE$ multiplié par la vie moyenne qui répond à AR. 4°. Si on fait $AR = 30$ ans, on trouvera par ce moyen, en conſultant les tables de mortalité, que l'aire REQ eſt à-peu-près la moitié de l'aire $AKEQ$, c'eſt-à-dire, qu'il y a à-peu-près autant d'hommes vivans de o ans à 30 ans, que de 30 à 100. Cette remarque nous ſera utile dans la ſuite.

(E) 1. D'un côté, les Inoculateurs aſſurent, que dans les 4 premieres années de la vie, on eſt moins ſujet à la petite Vérole que dans les ſuivantes; car on a vû plus haut (Note A), que, ſuivant eux-mêmes, preſque tout ce qui meurt avant quatre ans, (c'eſt-à-dire, environ la moitié de l'eſpéce humaine) meurt avant d'avoir eu la petite Vérole. D'un autre côté, pluſieurs Médecins prétendent (Voyez le Journal de Médecine de Janvier 1761) que dans les 10 premieres années de la vie on eſt dix fois plus ſujet à la petite Vérole que dans les autres. En admettant ces hypothèſes, la plus grande probabilité d'être attaqué de la petite Vérole, ſeroit depuis 4 ans juſqu'à 10. En même-tems, il ne paroît pas moins certain, que la petite Vérole eſt d'autant plus dangereuſe qu'on eſt plus avancé en âge. C'eſt pourquoi ſi $\frac{1}{n}$ exprime

à

à chaque âge la fraction ou partie des *non variolés* qui a la petite Vérole, & $\frac{1}{nm}$ la partie qui en meurt; il y a lieu de croire que $\frac{1}{n}$ eſt d'abord aſſez petit, & qu'il augmente enſuite, pour recommencer à diminuer après l'âge de 10 ans, & pour redevenir très-petit vers l'âge de 50 à 60 ans; & que $\frac{1}{m}$ augmente à meſure que l'âge augmente, ſur-tout depuis 15 ans juſqu'à la fin de la vie.

2. Il eſt vrai que la table de M. Bernoulli ne s'étend que depuis 0 ans juſqu'à 24 ans. Mais 1°. il paroît croire lui-même qu'il a fait le nombre $\frac{1}{n}$ de ceux qui ont la petite Vérole, trop grand pour la premiere année de la vie; 2°. ſur un nombre égal de perſonnes de 20 ou 24 ans d'une part, & de l'autre d'enfans de 4, 5, 6, &c. ans qui auront la petite Vérole, peut-on raiſonnablement ſuppoſer qu'il n'en mourra pas davantage dans la premiere claſſe que dans la ſeconde?

3. Auſſi les ſuppoſitions de M. Bernoulli conduiſent-elles à des conſéquences qui ne paroiſſent pas fort vraiſemblables; par exemple, à celle-ci, que dans le cours de la neuviéme année de la vie, il meurt par la ſeule petite Vérole les deux tiers de ce qui meurt par toutes les autres maladies priſes enſemble. Il y a, ce me ſemble, tout lieu de douter que l'expérience confirme jamais cette effrayante concluſion.

(*F*) 1. Ces ſuppoſitions n'ont rien de forcé, même

dans les principes des Inoculateurs. Suivant M. Bernoulli, il y a quatre ans de différence de vie moyenne pour les enfans de 5 ans qui n'ont pas eu la petite Vérole, & pour ceux qui l'ont eûe; & ſuivant le même Géometre, il doit y avoir à-peu-près le même gain pour les perſonnes de 30 ans, dont la vie moyenne eſt d'ailleurs d'environ 30 années par les tables de mortalité; ce ſeroit donc environ 34 ans pour les inoculés, ou plus éxactement (Note *D.* art. 14.) un peu plus de 30 ans pour ceux-ci, & environ 26 pour les non-inoculés.

2. En admettant cette ſuppoſition, & en ſuppoſant de plus que le riſque de mourir de l'inoculation ſoit $\frac{1}{200}$, celui qu'on inocule à 30 ans, riſque $\frac{1}{200}$ d'avancer ſa mort d'environ 26 ans, contre l'avantage d'augmenter d'un ſeptiéme ce qui lui reſte de tems à vivre, & ſa vie totale d'un quatorziéme, dont il ne devra jouir qu'à 56 ans. Or en ce cas le riſque eſt-il égal ou plus grand que l'avantage? Voilà la queſtion qu'il faut réſoudre, pour apprétier mathématiquement (dans les hypothèſes précédentes) les avantages ou les riſques de l'inoculation.

(G) 1. Avant que de développer cette difficulté, il ne ſera pas inutile d'en propoſer une autre, qui eſt générale pour l'eſtimation de la mortalité. Elle tombe ſur la maniere d'apprétier les degrés de probabilité de la vie. Si on s'en tient ſur cela aux régles ordinaires des probabilités, & qu'on regarde la vie comme une eſpéce de Loterie ou de jeu de hazard, on trouvera que l'*eſpérance* de chaque Joueur ou homme, eſt égale à la ſomme des

perſonnes vivantes à la fin de chaque année AR (*fig.* 1.) diviſée par le nombre AK des perſonnes vivantes au commencement A du tems AQ; ce qui donne l'aire entiere $AKEQ$ diviſée par AK: c'eſt à-dire, que l'*eſpérance* de chaque homme eſt égale au tems que doivent vivre tous ces hommes pris enſemble, ce tems étant diviſé par le nombre des hommes; comme dans une Loterie où chaque joueur a pris un billet, l'*eſpérance* de chaque joueur eſt égale à la ſomme des lots diviſée par le nombre des billets. Il ſemble donc, ſuivant cette premiere maniere ſi naturelle d'enviſager la choſe, que le tems que chaque homme peut eſpérer de vivre, doit être cenſé égal à ce qu'on appelle communément, *ſa vie moyenne.*

2. Cependant il y a une autre maniere tout auſſi plauſible d'enviſager la queſtion, qui donne un autre réſultat. C'eſt de chercher le tems AR, au bout duquel il ſera mort la moitié des vivans AK; & de regarder ce tems comme celui qu'on peut eſpérer de vivre: puiſqu'on peut parier au pair ou un contre un, qu'on ſera encore vivant au bout de ce tems. Ce tems AR eſt différent de celui qui donne la *vie moyenne*; excepté dans un ſeul cas qui n'a pas lieu dans la nature: c'eſt le cas où KEQ ſeroit une ligne droite, c'eſt-à-dire, où il mourroit chaque année un nombre égal de perſonnes. Or laquelle doit-on préférer de ces deux manieres d'eſtimer la durée de la vie? Elles paroiſſent toutes deux également plauſibles, quoiqu'elles donnent des réſultats très-différens.

Par exemple, la durée de la vie des enfans nouveaux nés, eſt eſtimée, ſuivant la premiere méthode, de 26 ans à-peu-près par les calculs de M. Halley; & la durée de la vie de ces enfans, eſtimée ſuivant la ſeconde méthode, eſt d'environ 8 ans. (*Voyez la Table inſérée à la fin du ſecond Volume de l'Hiſtoire Naturelle de Mrs de Buffon & d'Aubenton*). Cela vient de ce qu'il meurt une quantité prodigieuſe d'enfans dans la premiere année de la vie.

3. En ſuppoſant cette premiere difficulté réſolue, celle que nous avons touchée dans notre Mémoire, ſubſiſtera encore dans toute ſa force. Suppoſons que a ſoit *l'eſpérance de vivre*, ou la durée de la vie, eſtimée de l'une ou l'autre des deux manieres précédentes; & que $a+c$ ſoit l'*eſpérance de vivre* pour les inoculés. Il eſt viſible 1°. que celui qui ſe fait inoculer, acquiert l'eſpérance de vivre après le tems a, un nombre d'années $=c$; 2°. qu'il riſque $\frac{1}{300}$, ou, ſi l'on veut, en général $\frac{1}{n}$ de ſacrifier en un mois, en 15 jours, &, pour ainſi dire, tout d'un coup (car cela revient à peu-près au même pour un tems ſi court) tout le tems a qu'il peut eſpérer de vivre. On pourroit donc regarder $-\frac{a}{n}$ comme le riſque, & c comme l'eſpérance, ſi toutes choſes étoient d'ailleurs égales. Mais il faut remarquer 1°. que le riſque $-\frac{a}{n}$ eſt couru dans le mois, & pour ainſi dire dans le jour; au lieu que l'eſpérance de vivre un nombre c

d'années, eſt rejettée au bout du tems a. Et quand même on ne regarderoit pas l'eſpérance c comme diminuée par le tems a au bout duquel elle eſt placée, on ne peut guères ſe diſſimuler que le riſque $-\frac{a}{n}$ ne ſoit augmenté par le peu de tems durant lequel il eſt couru, ſur-tout lorſqu'il s'agit de la vie, c'eſt-à-dire, du plus précieux de tous les biens. Or en quelle raiſon le riſque $-\frac{a}{n}$ eſt-il augmenté par cette briéveté de tems? C'eſt ſur quoi on ne peut faire que des hypothèſes. 2°. Si le tems a, au bout duquel les années d'eſpérance c ſont placées, atteint juſqu'à un âge avancé, comme de 60 ans & plus, il eſt évident, que pendant ces années c, on ſera ſujet aux infirmités de la vieilleſſe; & qu'ainſi l'eſpérance c doit être diminuée à cet égard: puiſque le tems qu'on ſouffre, eſt proprement un tems à retrancher ſur la véritable durée de la vie, ſur la vie proprement dite. Or ſuivant quelle loi cette quantité c doit-elle être diminuée? C'eſt encore ſur quoi on ne peut faire que des hypothèſes, toujours vagues & peu ſatisfaiſantes.

(*H*) 1. J'en dis autant de ceux qui ont prétendu qu'on devroit ſe faire inoculer, quand l'inoculation ne diminueroit le riſque de mourir de la petite Vérole, que de la moitié, du tiers, du quart &c. Il me ſemble que dans cette aſſertion on n'a pas aſſez fait d'attention à la différence d'un riſque préſent où l'on s'expoſe, à un riſque

éloigné & incertain. Il meurt, dit-on, de la petite Vérole naturelle, un ſeptiéme de ceux qui en ſont attaqués; s'il mouroit un quatorziéme des inoculés (ce qui réduiroit le riſque à la moitié) oſeroit-on dire que dans ce cas l'inoculation dût être pratiquée?

2. J'ai été bien ſurpris, je l'avoue, de lire dans un Ouvrage de Médecine, que *l'éloignement* du riſque ne devoit être ici compté pour rien. Sur ce pied-là, un riſque de la vie qu'on doit courir dans le jour, & un riſque pareil qu'on ne doit courir qu'au bout de 30 ans, ſeroient égaux; qui pourra le croire?

(*I*) Selon les obſervations faites en Angleterre, la petite Vérole emporte $\frac{1}{14}$ du genre humain. Il meurt à Paris 20000 perſonnes par an; M. *de la Condamine* conclud de-là qu'il meurt à Paris (année commune) environ 1400 perſonnes de la petite Vérole. En ſuppoſant le nombre des Habitans de cette Ville de 700000 ames, c'eſt environ 1 ſur 500 qui meurt de la petite Vérole en un an, & par conſéquent 1 ſur 6000 en un mois. On pourra, dans la ſuite, avec des Liſtes éxactes, connoître plus préciſément ce rapport, & même, ce qui eſt eſſentiel, les variétés de ce rapport ſuivant les différens âges. Mais pour le préſent nous ſommes obligés de nous borner à cette eſtimation, qui même eſt beaucoup au-deſſous de la vérité; car on va voir que le nombre de ceux qui meurent de la petite Vérole, eſt beaucoup plus grand.

(*K*) En voici la preuve. De toutes les perſonnes actuellement vivantes, depuis le moment de la naiſſan-

ce jusqu'à 100 ans, il y en a à-peu-près autant (suivant les tables de mortalité) depuis 30 ans jusqu'à 100 ans, que depuis 0 ans jusqu'à 30 (Note *D*, Art. 20.). Donc de toutes les personnes actuellement vivantes, le nombre de celles qui existent depuis 0 ans jusqu'à 30 ans, est à-peu-près la moitié du tout. Or à 30 ans presque tout le monde a eu la petite Vérole; donc le nombre des personnes qui n'ont pas eu la petite Vérole, prises depuis 0 ans jusqu'à 100 ans, differe très-peu du nombre de celles qui ne l'ont pas eûe depuis 0 ans jusqu'à 30 ans. Or ce dernier nombre est évidemment plus petit, & beaucoup plus petit, que le nombre total des personnes vivantes depuis 0 ans jusqu'à 30 ans. Donc le nombre de personnes actuellement vivantes, & qui n'ont pas eu la petite Vérole, est moindre & beaucoup moindre, que la moitié du nombre total des personnes vivantes.

(*L*) 1. La plûpart des hommes ayant la petite Vérole long-tems avant 30 ans, on peut supposer sans risque, que le nombre de ceux qui n'ont pas eu la petite Vérole avant cet âge, est tout au plus la moitié de ceux qui parviennent à ce même âge, & par conséquent tout au plus le quart du total des vivans. Or, cela posé, le risque de mourir de la petite Vérole, seroit au moins de $\frac{1}{1500}$ par mois; & par conséquent presqu'égal à celui de l'inoculation, sagement administrée.

2. Si le risque de mourir de la petite Vérole à chaque âge, étoit de $\frac{1}{64}$ par an, comme le veut M. Bernoulli, ce risque seroit de $\frac{1}{768}$ en un mois, & par conséquent

plus grand que le risque $\frac{1}{1200}$ de l'inoculation, sagement administrée. Mais le calcul que nous avons fait, porte sur des suppositions moins gratuites, & n'est guères moins favorable à l'inoculation.

3. Il est vrai qu'on y a supposé, faute d'observations suffisantes, que le risque $\frac{1}{3000}$ de la petite Vérole naturelle, est le même pour tous les âges; or il est peut-être plus grand pour quelques-uns. Mais aussi il faut remarquer; 1°. que dans ce cas il seroit plus petit pour d'autres âges; 2°. que le risque total $\frac{1}{3000}$ pour tous les âges pris indifféremment, est certainement fort au-dessous de la vérité, comme on l'a prouvé art. 1. de cette Note.

(*M*) 1. Quelques Partisans de l'inoculation ont fait en sa faveur le raisonnement suivant. Il meurt en un mois à-peu-près une personne sur trois cens; donc en supposant le risque de l'inoculation de 1 sur 300, ce risque n'est pas plus grand que celui de mourir dans le même-tems de toute autre maladie accidentelle, & qu'on ne peut ni prévoir, ni prévenir. Ce raisonnement ne me paroît pas concluant. Car il faudroit, pour qu'il fût juste, que de trois cens personnes *inoculées au hazard*, il n'en mourût qu'une, comme de trois cens personnes *prises au hazard*, il n'en meurt qu'une en un mois par les autres maladies. Or le nombre des victimes de l'inoculation paroît être beaucoup plus grand que de 1 sur 300, quand on inocule sans précaution, comme les Listes mortuaires le prouvent. Au contraire de 300 personnes saines & bien choisies, il n'en meurt aucune par l'inoculation:

lation : & il y a lieu de croire qu'il n'en mourroit non plus aucune en un mois, ſi on les abandonnoit à la nature. Ainſi, quoique le raiſonnement dont il s'agit, ne ſoit pas concluant en faveur de l'inoculation, il ne ſauroit du moins être rétorqué contr'elle.

2. Un autre raiſonnement qu'on a fait en faveur de l'inoculation, ne me paroît pas non plus aſſez concluant. Il conſiſte à prouver que celui qui attend la petite Vérole, riſque à-peu-près autant d'en mourir, que celui qui l'a déja. Je ne diſpute point contre les calculs qu'on a faits là-deſſus; mais on a oublié d'avoir égard à cette différence eſſentielle entre les deux cas, que celui qui a déja la petite Vérole, court riſque d'en mourir dans très-peu de jours, & que l'autre ne riſque peut-être d'en mourir qu'au bout d'un grand nombre d'années. Or cette différence de tems doit en mettre une prodigieuſe dans l'eſtimation des deux riſques, & dans le parallèle qu'on en fait. C'eſt à quoi, je le répete, les Partiſans de l'inoculation n'ont point eu aſſez d'égard. Je me flatte qu'on en conviendra, ſi on fait attention à toutes les réfléxions que nous avons expoſées ſur ce ſujet, dans notre Mémoire, & dans les Notes précédentes.

3. Indépendamment de cette conſidération, je pourrois conteſter encore la ſuppoſition qu'on fait, que celui qui attend la petite Vérole, à quelque âge que ce ſoit, riſque preſqu'autant d'en mourir, que celui qui a cette maladie; parce que le riſque d'avoir la petite Vérole, diminue à meſure qu'on avance en âge. Quand il ſeroit

vrai, comme on le prétend, que de 100 enfans qui naiſſent, quatre ſeulement ſeront éxempts de la petite Vérole, & que par conſéquent la probabilité qu'on doit l'avoir, eſt de 24 ſur 25 lorſqu'on vient au monde; cette probabilité diminue vraiſemblablement à meſure qu'on vieillit, & à l'âge de 40, 50 ans &c. & par-del à, elle n'eſt peut-être plus que de 1 ſur 25. C'eſt ſur quoi les obſervations ſeules peuvent nous inſtruire parfaitement. Mais ce que nous venons de dire, ſuffit pour montrer que le raiſonnement précédent eſt appuyé ſur une ſuppoſition hazardée, & que d'ailleurs ce raiſonnement n'eſt pas concluant, même pour ceux qui admettroient la ſuppoſition.

(*N*) 1. Il y a d'autres conſidérations curieuſes à faire ſur l'inoculation, & en général ſur la vie des hommes; conſidérations qui rendent encore plus difficile l'application du calcul des probabilités à l'inoculation.

La premiere eſt celle-ci: que dans les premieres années de l'enfance, & dans les dernieres années de la vieilleſſe, les hommes ſont ſujets à beaucoup de maux & de maladies; qu'ainſi on peut regarder la vie pendant cet eſpace de tems, comme étant réellement accourcie, puiſqu'une partie de cette vie eſt à charge. C'eſt pourquoi on peut regarder, par exemple, le tems *phyſique* de la vie *AS* (*fig.* 5.) qui ſuit la naiſſance juſqu'à un certain âge, comme étant *réellement* réduit à un certain tems plus petit *TS*, égal au tems pendant lequel on n'a point ſouffert; & en général *AL* étant un tems *phy-*

ſigne quelconque donné de la vie, on ne devra cenſer ce tems égal qu'au tems BL, pendant lequel on a joui de la vie ſans ſouffrir, & qu'on peut appeller le tems de la *vie réelle*. Par ce moyen on tracera une courbe ATB, qui d'abord, c'eſt-à-dire, au point A, touchera preſque ſon axe, qui ſera enſuite convexe vers ce même axe, juſqu'à ce qu'enfin à un certain point T, elle vienne à faire avec cet axe un angle preſqu'égal à 45 degrés; quoiqu'un peu plus petit, comme il le doit toujours être; cet angle ſubſiſtera à-peu-près de cette grandeur, pendant le tems SL qui repréſente les plus belles années de la vie; & la courbe TB ſera pour lors à-peu-près une ligne droite, faiſant avec SL un angle d'un peu moins de 45 degrés; après cela la courbe deviendra concave vers ſon axe, & lui ſera preſque paralièle en O, vers les dernieres années de la vie.

2. Or cela poſé, il faudra dans les conſtructions précédentes ſubſtituer aux abſciſſes AR, les ordonnées correſpondantes RX, tout le reſte demeurant d'ailleurs le même; c'eſt-à-dire, qu'il faudra conſerver les mêmes valeurs des ordonnées y & z, & changer ſeulement les abſciſſes AR en RX.

3. Comme on a trouvé ci-deſſus, dans le cas de l'inoculation, que le tems Ap que les inoculés peuvent eſpérer de vivre, eſt plus grand qu'un pareil tems AR pour les non inoculés, on aura évidemment $p\xi > RX$; ainſi le tems $p\xi$ qu'on peut eſpérer de vivre après avoir été inoculé, ſera encore plus grand dans cette hypothèſe

que le tems *R X* qu'on peut eſpérer de vivre ſans l'inoculation. Mais il reſtera toujours ſur le calcul précis des avantages de l'inoculation, des difficultés ſemblables à celles qu'on a expoſées dans ce Mémoire & dans les Notes ci-deſſus.

4. J'ai ſuppoſé dans, l'art. précédent, que les inoculés étoient préciſément dans le même cas que les autres hommes; c'eſt-à-dire, que les tems *R X* de la vie *réelle*, répondans aux tems *A R* de la vie *phyſique*, ſont les mêmes pour les inoculés, & pour ceux qui ne le ſont pas. Cette ſuppoſition n'a rien qu'on puiſſe conteſter juſqu'ici par les obſervations; il y a même lieu de croire que les tems *R X* ſont un peu plus longs pour les inoculés que pour les autres; car ces inoculés une fois guéris, ſont délivrés d'une maladie, ſavoir de la petite Vérole; & cette maladie, même quand on n'en mourroit pas, eſt un mal qui doit être cenſé diminuer au moins de quelque choſe, le tems de la vie *réelle*. Au reſte la différence entre les deux états, eſt ſi petite à cet égard, qu'on ne doit ni ne peut en tenir aucun compte.

5. Je ne crains pas qu'on objecte que l'inoculation peut laiſſer dans le ſang le germe d'autres maladies, même non mortelles, qui rendroient à cet égard le ſort des inoculés moins favorable par rapport au tems *R X* de la vie *réelle*. Car outre que l'expérience ne prouve point cette prétention, je pourrois dire auſſi que l'inoculation raffermit le tempérament, & préſerve de diverſes maladies; ainſi à cet égard le ſort des inoculés ſeroit favo-

rable ; mais dans l'incertitude je ſuppoſe tout égal. Les raiſonnemens vagues de Médecine doivent être proſcrits dans l'éxamen de cette queſtion ; les faits ſeuls doivent décider.

6. On demandera ſans doute quelle doit être la loi des ordonnées de la courbe $ATXO$. Je réponds qu'on ne peut faire ſur cela que des conjectures ; cependant, pour donner là-deſſus un eſſai de calcul, je crois qu'on ne s'écartera pas beaucoup de la vérité, ſi l'on ſuppoſe 1°. $AS = 10$ ans, qui eſt le tems où les dangers de l'enfance ſont paſſés, & où l'on commence à jouir de la vie ; 2°. que la courbe AT ſoit une Parabole ordinaire, dans laquelle les ordonnées ſoient comme les quarrés des abſciſſes ; d'où l'on voit que l'angle en T étant (*hyp.*) de 45°, on aura $TS = \frac{1}{2} AS = 5$ ans ; 3°. que TB ſoit une ligne droite, & que l'abſciſſe correſpondante $SL = 50$ ans, ſavoir, depuis 10 ans juſqu'à 60 ; 4°. enfin que $LQ = 40$ ans, & que BO ſoit auſſi une portion de Parabole, faiſant en B un angle de 45°. avec ſon axe ; enſorte que $OT' = \frac{1}{2} BT' = 20$. Ces ſuppoſitions, qu'on peut changer en d'autres, ſi on ne les approuve pas, approcheront peut-être aſſez de la vérité ; mais je le répete, on eſt réduit ici aux conjectures.

7. Une ſeconde conſidération à faire par rapport à l'inoculation, & en général à la vie des hommes, c'eſt celle qui regarde l'utilité dont les hommes ſont à l'Etat, ou le tems qu'ils vivent *réellement* pour l'Etat, & qu'on peut appeller leur *vie civile*. Je m'explique. Il eſt certain que

dans les premieres années de la vie, les hommes ſont non-ſeulement peu utiles à l'Etat, mais même qu'ils lui ſont à charge, puiſqu'il faut les élever & les nourrir; ainſi le tems de leur vie par rapport à l'Etat dans les premieres années, c'eſt-à-dire, le tems de leur *vie civile* dans ces premieres années, eſt un tems qu'on doit conſidérer comme négatif; il en eſt de même des années de la décrépitude. C'eſt pourquoi ſi les abſciſſes AR (*fig.* 6.) repréſentent les tems de la vie *phyſique*, les tems de la vie *civile* ſeront repréſentés par les ordonnées RX d'une courbe $AYSXO$, qui d'abord aura des ordonnées négatives, qui coupera ſon axe en A ſous un angle de 45°, deviendra enſuite concave vers ſon axe avec très-peu de courbure, en s'écartant toujours de ce même axe juſqu'à un point Y, dont l'abſciſſe AE exprimera le tems où les hommes commencent à n'être, ni à charge, ni utiles, ou plutôt auſſi utiles qu'à charge à l'Etat. Enſuite la courbe ſe rapprochera de ſon axe, en demeurant toujours concave, juſqu'à un point S où elle fera avec ſon axe un angle de 45°. & dont l'abſciſſe AT marquera le tems où les citoyens commencent à être entiérement utiles. Après cela notre courbe deviendra une ligne droite SB, juſqu'à un point B dont l'abſciſſe AL exprimera l'âge où l'on commence à être moins utile à l'Etat par ſon âge & ſes infirmités; enfin elle ſe rapprochera de ſon axe, en devenant toujours concave, juſqu'à un point O qui répond à $AQ = 95$ ou 100 ans, & où elle fera avec ſon axe un angle de

45°: & il faut remarquer qu'entre les points B & O, il y aura un point V où la courbe ſera parallèle à ſon axe; c'eſt celui qui répond au commencement Z de la décrépitude, qui eſt le tems où les hommes ne ſont plus qu'à charge à l'Etat.

8. Si on demande quelle loi on peut donner aux ordonnées de la courbe $AYSXO$, j'imagine que ce ne ſera peut-être pas s'écarter beaucoup de la vérité (dans une matiere auſſi obſcure & auſſi conjecturale que celle-ci) de ſuppoſer AYS une Parabole dans laquelle $AC =$ 20 ans, les points S & C ſe confondant; ce tems AC eſt celui où les hommes ſont cenſés n'avoir point encore vécu pour l'Etat. On fera enſuite $CL = 40$ ans, c'eſt-à-dire depuis 20 ans juſqu'à 60; $LQ = 40$ ans, depuis 60 juſqu'à 100; & BVO ſera une portion de Parabole ordinaire; ce qui donnera $Vu = \frac{1}{2} Bu = 10$ ans.

9. D'après ces ſuppoſitions, ou d'après d'autres ſemblables, & peut-être plus éxactes, qu'on pourra imaginer ſur l'eſtimation de la vie civile des hommes; voici les corrections qu'on pourra faire aux calculs de l'inoculation. Soit tracée d'abord la courbe $K'E'Q$, qui repréſente la courbe de *la vie phyſique* des inoculés, ou de ceux qui ne le ſont pas. A chaque point ϵ correſpondant à l'ordonnée RE', on élevera l'ordonnée $\epsilon\xi = RX$, & qui ſera poſitive ou négative, ſelon que RX ſera poſitive ou négative; on formera par ce moyen une courbe $K'\zeta\Omega\xi\omega$, qui aura d'abord des ordonnées négatives, qui coupera enſuite ſon axe au point Ω ou $A\Omega = CD$,

& qui reviendra enſuite le couper au point ω, ou $A\omega = QO$. L'aire de cette courbe ſera égale à l'aire $A\Omega\xi\omega$ moins l'aire $K'\zeta\Omega$, & exprimera la vie moyenne des hommes, par rapport à l'Etat (c'eſt-à-dire, leur vie *civile*) ſoit que la courbe $K'E'Q$ repréſente la vie ordinaire des hommes, ou celle des inoculés.

10. Il n'eſt pas douteux que cette conſidération de la vie *réelle* & de la vie *civile* des hommes ne ſoit eſſentielle à la théorie Mathématique de l'inoculation, pour déterminer les tems où cette opération ſeroit la plus avantageuſe, ſoit aux Particuliers dans le premier cas, ſoit à l'Etat dans le ſecond; c'eſt-à-dire, pour déterminer les cas où la vie moyenne des citoyens (ſoit *réelle*, ſoit *civile*) ſeroit le plus augmentée par l'inoculation. Mais pour cela il faudroit commencer par avoir une bonne méthode pour eſtimer la vie *réelle* & la vie *civile* des hommes; or il n'eſt pas poſſible, comme nous l'avons déja dit, de parvenir ſur ce ſujet à une théorie ſatisfaiſante. Tout au plus peut-on ſe flatter d'arriver à une eſtimation approchée; mais il reſtera toujours quelque choſe de vague & d'arbitraire dans ces ſortes d'eſtimations. Ce qu'il y a de certain, c'eſt que la vie *réelle*, & ſur-tout la vie *civile* different beaucoup de la vie *phyſique*; l'Eſſai de théorie que nous venons d'en donner, tout imparfait qu'il eſt, en eſt une preuve ſuffiſante.

11. Un ſavant Géometre m'a communiqué une maniere de calculer les avantages de l'inoculation, qui eſt fort ſimple, mais qui ne me paroît pas juſte. J'en ferai mention

mention ici, parce que le ſophiſme en eſt aſſez délicat. Soit, dit-il, après avoir tracé la courbe de mortalité générale KEQ (*fig.* 7.), Ee = au nombre des morts de la petite Vérole pendant le tems AR; & ayant fait la même choſe à chaque point E, ſoit tracée la courbe KeZ, qui marquera par ſes ordonnées Ge le nombre de ceux qui meurent durant le tems AR par d'autres maladies que la petite Vérole. Il eſt viſible, dit ce Géometre, que NZ marquera le nombre de ceux qui meurent pendant le tems total AQ, par d'autres maladies que la petite Vérole. Suppoſons à préſent, continue-t-il, que Kk ſoit le nombre de ceux qui meurent de l'inoculation; il eſt clair qu'au bout du tems total AQ toutes les perſonnes Ak ſeront mortes, puiſque ce tems AQ eſt ſuppoſé le plus long terme de la vie; il eſt clair de plus que toutes ces perſonnes Ak mourront d'autres maladies que de la petite Vérole; donc, continue toujours ce Géometre, ſi on fait $NZ : Ge :: Ak$ eſt à un quatriéme terme Gi, ce terme Gi exprimera le nombre de ceux, qui ayant été inoculés, meurent pendant le tems AR par d'autres maladies que la petite Vérole; & ſi à ce nombre Gi on ajoute $io = Kk$ = au nombre de ceux qui ſont morts à l'inſtant A par l'inoculation, on aura Go = au nombre total des inoculés morts pendant le tems AR. Ainſi ce Géometre ſe ſert de la courbe koQ pour repréſenter la courbe de mortalité des inoculés.

12. L'erreur de ce raiſonnement eſt, ſi je ne me

trompe, dans la proportion $NZ : Ge :: Ak : Gi$. Pour le faire ſentir, je ſuppoſe $Kk = o$, & $QZ : Ee :: NZ : Ge$; donc, ſuivant ce Géometre, Gi ſeroit $= GE$; c'eſt-à-dire, que malgré l'inoculation, dont on ſuppoſe qu'il ne meurt pas une ſeule perſonne, il mourroit dans le même-tems autant de perſonnes que ſi on n'avoit pas inoculé. Or cela ne ſe peut, puiſque l'inoculation faite à l'inſtant A, & dont (*hyp.*) il ne meurt perſonne, ſauve la petite Vérole à toutes les perſonnes AK, & par conſéquent leur ſauve une grande cauſe de mort. Ainſi, quoiqu'à la fin du tems AQ, toutes les perſonnes AK ſoient mortes (parce que ce tems AQ eſt (*hyp.*) le plus long terme de la vie) il eſt certain qu'à la fin du tems AR, il devroit toujours y avoir plus d'inoculés vivans, ſurtout ſi Kk étoit $= o$.

13. Envain diroit-on que nous avons ſuppoſé gratuitement $QZ : Ee :: NZ : Ge$; car en général quelque ſuppoſition qu'on faſſe ſur le nombre des morts de la petite Vérole, il eſt viſible que l'inoculation ſeroit avantageuſe, s'il n'en mouroit perſonne, & ſi cette opération ſauvoit la petite Vérole. Or c'eſt ce qui n'auroit pas lieu dans la conſtruction que nous venons de rapporter; cette conſtruction, ou plutôt cette ſolution n'eſt donc pas juſte.

14. Mais pour le faire voir d'une maniere encore plus nette, & qui rendra ſenſible en même tems l'erreur du raiſonnement dont il s'agit, je ſuppoſe $Kk = QZ$ (*fig.* 8.), c'eſt-à-dire, que ceux qui meurent de l'inoculation à

l'inſtant A ſoient en nombre égal à ceux qui mourroient de la petite Vérole naturelle pendant le tems total AQ; en ce cas, ſuivant la conſtruction de notre ſavant Géometre, Gi ſeroit $= Ge$, & la courbe koQ ſeroit parallèle, égale & ſemblable à la courbe KeZ; Ro ſeroit le nombre des inoculés vivans à la fin du tems AR, & l'on auroit $d(Ro) = -d(Ge)$. Or je dis que la différence de Ro devroit être $<$ que $-d(Ge)$. Car la différence de Ro exprime ceux qui meurent dans le tems infiniment petit Rr par d'autres maladies que la petite Vérole, ſur le nombre de perſonnes Ro; & la quantité $-d(Ge)$ exprime ceux qui meurent dans le même tems par d'autres maladies que la petite Vérole ſur un nombre de perſonnes $= RE$; donc puiſque RE eſt $> Ro$, il faut que $d(Ro)$ ſoit $< -d(Ge)$; car $d(Ro)$ doit être à $-d(Ge) :: Ro : RE$.

15. L'erreur du raiſonnement que nous réfutons, vient de ce qu'on y compare deux cas qui ne ſont pas ſemblables. Dans le premier qui eſt celui de l'inoculation, tous ceux qui doivent mourir de la petite Vérole, en meurent, pour ainſi dire, au même inſtant; dans le ſecond ils meurent à différens âges, & dans toute l'étendue du tems AQ. Ainſi en ſuppoſant, par exemple, $Kk = QZ$, il reſte, après le tems AR, plus de vivans RE non inoculés, que d'inoculés Ro. Or comme il meurt toujours plus de perſonnes (indépendamment même de la petite Vérole) ſur un nombre de vivans plus grand, il eſt aiſé de conclure que le nombre de vivans RE

ſera plus diminué durant le tems $R\,r$ par d'autres maladies que la petite Vérole, que ne le ſera pendant le même-tems le nombre de vivans $R\,o$, auſſi par d'autres maladies. Cependant la conſtruction ou ſolution propoſée ſuppoſe le contraire; par conſéquent elle ſuppoſe une choſe fauſſe.

16. Voilà, ce me ſemble, en quoi conſiſte l'erreur de cette ſolution, qui d'ailleurs eſt fort ſimple, & dont l'élégance doit faire regretter qu'elle ne ſoit pas juſte.

17. Que conclure de tout ce Mémoire? 1°. Que juſqu'à préſent on n'a point calculé d'une maniere éxacte & ſatisfaiſante, les avantages de l'inoculation, ni préſenté la queſtion comme elle le doit être. 2°. Qu'on n'y a pas aſſez diſtingué deux queſtions différentes, l'avantage que l'Etat peut tirer de l'inoculation, & celui que les Particuliers peuvent en eſpérer. 3°. Que pour calculer d'une maniere préciſe les avantages de l'inoculation, il faut d'abord & préliminairement avoir une bonne méthode pour calculer la probabilité de la vie; méthode ſur laquelle on peut former des doutes bien fondés. 3°. Que quand on aura cette méthode, il faudra en trouver une autre pour comparer le riſque de mourir en un mois ou 15 jours, ou en général en un tems fort court, à l'eſpérance de vivre quelques années ou quelques mois de plus au bout d'un tems fort éloigné; méthode très-difficile, & peut-être impoſſible à trouver. 4°. Qu'il faudra trouver outre cela une bonne théorie pour parvenir à comparer la vie *phyſique* des hommes avec leur vie

réelle & leur vie *civile*; théorie qui eſt pour le moins auſſi remplie de difficultés. 5°. Enfin, & c'eſt-là le plus facile, qu'il faudroit avoir des tables de mortalité, qui marquaſſent l'âge des perſonnes mortes de la petite Vérole; tables qui nous manquent encore. Ces tables au reſte ne pourroient être trop étendues ni trop multipliées; elles donneroient le moyen de calculer la mortalité de la petite Vérole, pour les différens âges, pour les différens climats, pour les différentes ſaiſons, pour les Villes & pour les Campagnes. On en déduiroit de combien le danger de la petite Vérole diminue dans chacun de ces cas la vie moyenne des hommes. On ſauroit auſſi par ce même moyen quel eſt le danger de l'inoculation dans ces différens cas, ſuppoſé qu'il y en ait encore pour l'inoculation ſagement pratiquée; & de combien cette opération augmenteroit la vie moyenne. Et ſi le danger de l'inoculation ſe trouvoit nul, ou comme nul, alors l'augmentation de la vie moyenne ſeroit le véritable avantage réſultant de cette opération.

18. On voit donc, que ſoit faute de théories ſuffiſamment éxactes, ſoit faute d'obſervations ſuffiſantes, on ne peut juſqu'ici, & peut-être qu'on ne pourra de long-tems parvenir à une bonne Analyſe Mathématique des avantages de l'inoculation. Mais d'un autre côté, ſi les Inoculateurs viennent à bout de conſtater par les faits, ſans aucune replique, que le riſque de l'inoculation n'eſt pas de 1 ſur 1200, ou même ſur un plus grand nombre, quand on la pratique avec les précautions néceſ-

ſaires (*a*), il faudra convenir que ce riſque devra pour lors être réputé nul, & qu'ainſi l'inoculation ſera inconteſtablement avantageuſe, non-ſeulement à l'Etat, mais encore aux Particuliers.

19. On m'objectera peut-être que je n'ai point tenu aſſez de compte dans ce Mémoire des faits contraires à l'inoculation, & rapportés par ſes adverſaires. Je réponds 1°. que mon objet n'a point été de diſcuter des faits, mais d'examiner ſeulement les conſéquences Mathématiques qu'on en tire, ou qu'on en peut tirer. 2°. Que les faits rapportés par les *anti-Inoculateurs*, ont été conteſtés pour la plûpart par leurs adverſaires, & qu'ainſi je ne pouvois parler de ces faits pour en rien conclure de certain. 3°. qu'au contraire le fait des 1200 inoculés bien choiſis, & guéris en Angleterre par M. Ranby, ne me paroît avoir été conteſté de perſonne; & qu'en conſéquence c'eſt de cet unique fait *avoué* que je ſuis parti, pour y trouver, ſinon des preuves démonſtratives,

(*a*) On m'a objecté que ſi on ne donnoit l'inoculation qu'à des Sujets bien conſtitués, on ne gagneroit rien par-là, puiſque vraiſemblement ces Sujets auroient échappé à la petite Vérole naturelle. Je ne crois pas cette réflexion juſte; car l'expérience prouve que les Sujets les plus vigoureux ſuccombent pour le moins autant que les autres à la petite Vérole naturelle. Au contraire on a vû des Sujets foibles & mal ſains, échapper à l'inoculation, après avoir été bien préparés. Le grand avantage de l'inoculation eſt cette préparation que l'on donne aux Sujets qu'on inocule, & en conſéquence de laquelle la petite Vérole doit être infiniment moins funeſte.

au moins un préjugé favorable à la pratique de l'inoculation.

20. Qu'on ſe garde donc bien de proſcrire cette opération, puiſque les faits qui lui ſont avantageux, paroiſſent être juſqu'ici en beaucoup plus grand nombre que les faits contraires. Mais qu'on là pratique avec toute la prudence & toutes les précautions convenables, au point de faire évanouir le peu de crainte qu'elle peut encore laiſſer. Qu'on tâche de ne pas perdre, s'il eſt poſſible, un inoculé ſur 3000, ou au moins ſur 1500; alors l'inoculation ne devra plus faire de peur à perſonne; alors l'intérêt de l'Etat & celui des Particuliers ſeront les mêmes dans cette opération; & l'on pourra dans vingt ou trente années tout au plus, par des Liſtes éxactes & nombreuſes, connoître au juſte de combien l'inoculation augmente à chaque âge la vie moyenne des hommes. Cette augmentation de la vie moyenne ſera pour lors le véritable avantage de l'inoculation; puiſque le riſque de cette opération ſera entiérement nul, ou tout au plus égal à celui qu'on court d'avoir la petite Vérole & d'en mourir dans le même mois où l'on ſe fait inoculer.

Fin du onziéme Mémoire & de ſes Notes.

DOUZIÉME MÉMOIRE.

Application de ma ſolution du Problême des trois Corps, à la Théorie des Comètes.

I.

SOIT A (*fig.* 9.) un corps lancé ſuivant une direction AH perpendiculaire à AS, & pouſſé vers le point fixe S, par une force qui ſoit en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, & qui au point A ſoit $= F$; ſuppoſons de plus que ce corps ſoit pouſſé par deux autres forces, dont l'une φ ſoit dans la direction du rayon vecteur CS, & dont l'autre π ſoit perpendiculaire au même rayon vecteur. J'ai démontré dans les Mémoires de l'Académie de 1745, que ſi on nomme

SC . . . . . x,
SA . . . . . a,
La viteſſe en C . . . . . v,
La différentielle de l'arc AC . . . . . ds,
L'arc circulaire décrit du rayon SA, & compris entre SA & SC . . . . . z,
Enfin la viteſſe en A . . . . . g,

J'ai

J'ai démontré, dis-je, qu'en ſuppoſant $u = \frac{aa}{x}$, on auroit pour l'équation de l'orbite AC décrite par le corps,

$$ddu + \frac{u\,dz^2}{a^2} - \frac{a^2\,dz^2}{ggu^4} \times \left(\frac{Fuu}{aa} + \varphi - \frac{\pi a\,du}{u\,dz} \right) \times \left(1 - \frac{a\,ds}{v\,x\,x\,dz} \int \frac{\pi\,x\,ds}{v} \right)^2 = 0.$$

II.

J'ai démontré de plus dans le même Mémoire, que l'on aura en général $\frac{ds}{v} = \frac{x\,x\,dz}{aag} - \frac{ds}{avg} \int \frac{\pi\,x\,ds}{v}$; & j'ai remarqué encore que ſi la force π eſt ſuppoſée très-petite par rapport à la force F, on pourra mettre dans le ſecond membre de cette équation à la place de $\frac{ds}{v}$ ſa valeur approchée $\frac{x\,x\,dz}{aag}$; ce qui donnera

$$\frac{ds}{v} = \frac{x\,x\,dz}{aag} - \frac{x\,x\,dz}{aag} \int \frac{\pi\,x^3\,dz}{a^3\,g\,g}.$$

III.

J'ai remarqué auſſi dans le même Mémoire, que ſi les forces φ & π ſont très-petites par rapport à la force $\frac{Faa}{xx}$, ou (ce qui eſt la même choſe) $\frac{Fuu}{aa}$, l'équation de l'art. I. ſe réduira à $ddu + \frac{u\,dz^2}{a^2} - \frac{F\,dz^2}{gg} + \frac{2F\,dz^2}{gg} \times$

$$\int \frac{\pi\,a^3\,dz}{u^3\,g\,g} - \frac{\varphi\,a^2\,dz^2}{u^4\,g\,g} + \frac{\pi\,a^3\,du}{g\,g\,u^3\,dz} \times dz^2 = 0.$$

IV

J'ai démontré de plus dans le même Mémoire, que si on fait $\frac{u}{a^2} - \frac{F}{gg} = \frac{t}{a^2}$, & $M = \frac{2F}{gg}\int\frac{\pi a^3 dz}{u^3 gg} - \frac{\varphi a^2}{uugg} + \frac{\pi a^3 du}{gg u^3 dz}$, on aura, en supposant $a=1$, l'équation à intégrer $ddt + td\zeta^2 + Md\zeta^2 = o$; & que l'intégrale de cette équation sera $t = \mathfrak{f}\cos.\zeta + c^{\zeta\sqrt{-1}}\int\frac{Md\zeta c^{-\zeta\sqrt{-1}}\sqrt{-1}}{2} - c^{-\zeta\sqrt{-1}}\int\frac{Md\zeta c^{\zeta\sqrt{-1}}\sqrt{-1}}{2}$, $\mathfrak{f}$ étant la valeur de t quand $\zeta = o$, c'est à-dire, au point A.

V.

Enfin j'ai dit dans le même Mémoire, que si on veut faire disparoître les imaginaires de cette équation, il n'y a qu'à supposer, suivant les formules si connues des Géometres, $c^{\zeta\sqrt{-1}} = y\sqrt{-1} + \sqrt{1-yy}$, & $c^{-\zeta\sqrt{-1}} = -y\sqrt{-1} + \sqrt{1-yy}$, y exprimant le sinus de l'angle ζ; ce qui donnera tout de suite $t = \mathfrak{f}\cos.\zeta + \sqrt{1-yy}\int My dz - y\int Mdz\sqrt{1-yy}$, ou $t = \mathfrak{f}\cos.\zeta + \cos.\zeta\int Mdz\sin.\zeta - \sin.\zeta\int Mdz\cos.\zeta$.

VI.

Dans cette équation la partie $t = \mathfrak{f}\cos.\zeta$ exprime l'équation de l'orbite non troublée par les forces φ & π; & la partie $\frac{c^{\zeta\sqrt{-1}}\int Mdz\sqrt{-1}c^{-\zeta\sqrt{-1}}}{2} -$

$\frac{e^{-\zeta\sqrt{-1}}\int M d\zeta \sqrt{-1} - e^{\zeta\sqrt{-1}}}{2}$, ou, ce qui eſt la même choſe, $\cos.\zeta \int M d\zeta \sin.\zeta - \sin.\zeta \int M d\zeta \cos.\zeta$, exprime le changement que la perturbation cauſée par les forces φ & π produit dans la valeur primitive de ε, ſavoir dans $\delta \cos.\zeta$; & en ſuppoſant, comme ci-deſſus, $a = 1$, M ſera égale à $\frac{2F}{gg}\int \frac{\pi d z}{u^3 gg} - \frac{\varphi}{u u gg} + \frac{\pi d u}{gg u^3 d\zeta}$; quantité dans laquelle j'ai remarqué encore qu'on pouvoit mettre au lieu de u ſa valeur $\frac{F}{gg} + \varepsilon$, ou $\frac{F}{gg} + \delta \cos.\zeta$, qui auroit lieu dans l'orbite non troublée; pourvû que les forces perturbatives φ & π fuſſent très-petites par rapport à la force $\frac{F a a}{x x}$.

VII.

Par toutes ces formules, il eſt facile de déterminer *au moyen des quadratures*, les perturbations de l'orbite des Comètes. En effet (comme je l'ai remarqué encore dans le Mémoire déja cité) ſoit que l'orbite d'une Comète ſoit fort inclinée ou non à l'Ecliptique, on peut toujours la regarder comme ſenſiblement plane, & trouver les forces φ & π qui agiſſent dans le plan de cette orbite, & qui feront ſenſiblement les mêmes que dans l'orbite non altérée. Pour trouver ces forces φ & π, il faut, comme je l'ai dit encore, avoir égard non-ſeulement à l'action des Planetes ſur la Comète, mais encore

à l'action des mêmes Planètes ſur le Soleil, qu'il faut tranſporter à la Comète en ſens contraire. A l'égard du mouvement des nœuds & de la variation de l'inclinaiſon qui réſultent des mêmes forces φ & π, j'ai donné dans le même Mémoire, les formules pour les trouver; formules que je rappellerai plus bas, pour indiquer les moyens d'en faire uſage.

VIII.

1. Il eſt donc conſtant par tout ce qu'on vient de lire, que ma ſolution du Problême des trois corps, lûe en 1747 à l'Académie avant aucune autre, & imprimée dans les Mémoires de 1745, n'eſt pas moins applicable à la théorie des perturbations des Comètes, qu'à celle des Planetes, & que le Mémoire cité contient abſolument tous les principes, & même toutes les formules néceſſaires pour cette application.

2. Un ſavant Géometre a prétendu dans un Ecrit publié au mois d'Août 1759, que *juſqu'à ce moment* je n'avois point donné de ſolution du Problême des trois corps, applicable au mouvement des Comètes. Cependant il a reconnu depuis, qu'en 1754, dans *mes Recherches ſur le Syſtême du Monde*, ſeconde Partie, pag. 230, j'avois donné une formule applicable à ce mouvement, cinq ans avant que perſonne penſât à le calculer. Si les occupations de ce Géometre lui euſſent permis de jetter les yeux ſur mon Mémoire de 1745, il auroit vû que la formule que j'ai donnée en 1754, ne differe point

du tout de celles de mon Mémoire de 1745, puiſque j'ai dit expreſſément dans ce dernier Mémoire, que pour faire évanouir les imaginaires de la valeur de t, il falloit faire $c^{z\sqrt{-1}} = \text{ſin. } z\sqrt{-1} + \text{cof. } z$, & $c^{-z\sqrt{-1}} = -\text{ſin. } z\sqrt{-1} + \text{cof. } z$, ce qui donne ma formule de 1754 par un calcul que le plus ignorant Algébriſte peut faire en un moment. Voyez auſſi ſur cela mon Mémoire intitulé *Réflexions ſur le Problême des trois Corps*, imprimé dans ce Volume.

IX.

1. Soit donc C (*fig.* 10.) une Comète, A ſon perihelie, S, le Soleil, dont nous appellerons auſſi la maſſe . . S

Le rayon vecteur JS de la Planete perturbatrice, réduit au plan de l'orbite de la Comète, ... ξ

L'angle JSC . . . . . ζ

DB, La ligne des nœuds de l'orbite de la Comète & de l'orbite de la Planete perturbatrice,

L'angle JSB V

La tangente de l'inclinaiſon des deux orbites . . . . m

La maſſe de la Planete perturbatrice . . . . . J

On aura la diſtance de la Planete perturbatrice au Soleil . . . . . $\xi\sqrt{1 + m^2 \text{ ſin. } V^2}$.

La force ſuivant CS, réſultante de l'action de la Planete J ſur le Soleil, ſera $\dfrac{J \cdot \text{cof. } \zeta}{\xi^2 (1 + m^2 \text{ ſin. } V^2)^{\frac{1}{2}}}$.

La force perpendiculaire à CS, & réſultante de la

même action, ſera $\frac{J \text{ ſin. } \zeta}{\xi^2 (1 + mm \text{ ſin. } V^2)^{\frac{1}{2}}}$.

La force ſuivant CS, réſultante de l'action de la Planete J ſur la Comète, ſe trouvera . . . . . .

$$\frac{J \cdot x - J \cdot \xi \text{ cof. } \zeta}{(\xi^2 + xx - 2\xi x \text{ cof. } \zeta + \xi^2 m^2 \text{ ſin. } V^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Et la force perpendiculaire à CS, réſultante de la même action, ſera $- \frac{J \xi \text{ ſin. } \zeta}{(\xi^2 + xx - 2\xi x \text{ cof. } \zeta + \xi^2 m^2 \text{ ſin. } V^2)^{\frac{3}{2}}}$.

2. De plus la Comète étant continuellement tirée vers S par une maſſe $= S + C$, & avec une force réciproquement proportionnelle au quarré des diſtances, on aura $\frac{F a a}{x x} = \frac{S + C}{x^2}$.

3. Donc en faiſant, pour abréger $a = 1$, ou plutôt, ce qui revient au même, ſubſtituant au lieu de l'angle $\frac{\chi}{a}$, la quantité χ qui repréſentera le même angle, en prenant le ſinus total pour l'unité, on aura pour les Comètes

$$F = S + C,$$

$$M = \frac{2S}{gg} \int \frac{\pi^3 \, d\chi}{a a g g} - \frac{\varphi x^2}{gg} + \frac{\pi \cdot a^4 \, du}{u^3 g g d\chi};$$

$$\varphi = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{J \cdot \text{cof. } \zeta}{\xi^2 (1 + m^2 \text{ ſin. } V^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{J \cdot x - J \xi \text{ cof. } \zeta}{(\xi^2 + x^2 - 2\xi x \text{ cof. } \zeta + \xi^2 m^2 \text{ ſin. } V^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\pi = \ldots\ldots \frac{J \cdot \text{sin. } \zeta}{\xi^2 (1 + m^2 \text{ sin. } V^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{J \cdot \xi \text{ sin. } \zeta}{(\xi^2 + x^2 - 2\xi x \text{ cos. } \zeta + \xi^2 m^2 \text{ sin. } V^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

X.

1. Substituant ces valeurs de φ & de π dans la quantité M des Art. IV & VI, & mettant pour F sa valeur $S + C$, & pour u sa valeur $t + \frac{F}{gg}$, ou $t + \frac{S+C}{gg}$ dans l'équation de l'Art. IV. qui exprime la valeur de t, & pour δ sa valeur $a - \frac{S+C}{gg}$, on aura $\ldots\ldots$ $u = a \text{ cos. } z + \frac{S+C}{gg} - \frac{S+C}{gg} \text{ cos. } z - \text{sinus } z \int M dz \text{ cos. } z + \text{cos. } z \int M dz \text{ sin. } z$, pour l'équation qui exprime la valeur de la quantité $\frac{aa}{x}$, x étant le rayon de l'orbite de la Comète. On voit de plus que si on fait $-\text{sin. } z \int M dz \text{ cos. } z + \text{cos. } z \int M dz \text{ sin. } z = \alpha$, α étant une quantité qui est censée très-petite par rapport à u, on aura à-très-peu-près $x = \frac{aa}{\frac{S+C}{gg} + (a - \frac{S+C}{gg}) \text{cos. } z} - \frac{aa\alpha}{\left[\frac{S+C}{gg}(a - \frac{S+C}{gg}) \text{ cos. } z\right]^2}$; ou, en nommant x' le rayon de l'ellipse non altérée, $x = x' - \frac{\alpha x' x'}{a}$.

2. De plus, le tems répondant à l'angle z & au rayon

vecteur x, c'eſt-à-dire (Art. II.) $\int \frac{x\,x\,dz}{a\,g} - \int\left(\frac{x\,x\,dz}{a\,g}\int\frac{\pi\,x^3\,dz}{a^2\,g\,g}\right)$, ſera $\int \frac{a^3\,dz}{g\left[\frac{S+C}{g\,g}+\left(a-\frac{S+C}{g\,g}\right)\cos.z\right]^2}$

$$-\int\frac{2\,a^3\,a\,dz}{g\left[\frac{S+C}{g\,g}+\left(a-\frac{S+C}{g\,g}\right)\cos.z\right]^3}$$

$$-\int\left(\frac{a^3\,dz}{g\left[\frac{S+C}{g\,g}+\left(a-\frac{S+C}{g\,g}\right)\cos.z\right]^2}\int\frac{\pi\,a^4\,dz}{g\,g\left[\frac{S+C}{g\,g}+\left(a-\frac{S+C}{g\,g}\right)\cos.z\right]^3}\right), \text{ ou } \int\frac{x'\,x'\,dz}{a\,g}-\int\frac{2\,x'^3\,a\,dz}{a^3\,g}$$

$$-\int\frac{x'\,x'\,dz}{a\,g}\int\frac{\pi\,x'^3\,dz}{a\,a\,g\,g};$$

3. Toutes ces formules ſont une ſuite néceſſaire & ſimple des principes que j'ai établis dans mon Mémoire de 1745, & depuis dans mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, ſur les quantités qu'on peut & qu'on doit négliger pour calculer les perturbations de l'orbite.

XI.

1. Quoiqu'on puiſſe, au moyen de ces différentes formules, calculer les perturbations des Comètes, cependant le calcul en ſeroit ſi pénible, par les quadratures multipliées & compliquées qu'il exige, qu'il eſt néceſſaire de chercher des méthodes pour l'abréger. M'étant occupé de cet objet, voici celle que j'ai trouvée, & que

je

je vais expoſer en ſuivant la progreſſion des idées qui l'ont produite.

2. Puiſqu'on regarde le Soleil S (*fig.* 11.) comme immobile, & la Planète perturbatrice J' comme décrivant autour de S une ellipſe, dans un plan différent, ſi l'on veut, de l'orbite de la Comète, il s'enſuit que le centre commun de gravité G des Corps S & J', décrira pareillement une ellipſe autour du centre S regardé comme immobile, & qu'il la décrira dans le même tems que l'ellipſe $J'O$ eſt décrite par la Planete J' autour du point S.

3. De plus il eſt évident que le point G eſt attiré vers S par une force égale à celle qui attire ce Corps J', multipliée par $\frac{GS}{SJ'}$; c'eſt-à-dire, par une force égale à $\frac{S+J}{J'S^2} \times \frac{GS}{J'S} = \left(\text{à cauſe de } \frac{GS}{J'S} = \frac{J}{S+J}\right)$ $\frac{S+J}{GS^2} \times \frac{J^2}{(S+J)^2} \times \frac{J}{S+J} = \frac{J}{GS^2} \times \frac{J^2}{(S+J)^2}$; donc la force attractive du point G eſt en raiſon inverſe du quarré de la diſtance GS; & par conſéquent le point G ſe meut dans ſon ellipſe autour de S, comme s'il la décrivoit, non d'un mouvement forcé, mais d'un mouvement libre.

XII.

Donc tandis que la Comète C (*fig.* 12.) ſe meut autour du Soleil dans ſon orbite telle qu'elle eſt, on peut ſuppoſer ou imaginer un point γ qui étant pouſſé vers la Co-

mète C, par une force réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance, decrive autour de cette Comète, comme une eſpéce de Satellite, une ellipſe égale & ſemblable à l'ellipſe décrite par le point G autour de S. Il faut ſeulement bien remarquer, que dans cette ſuppoſition, la force qui fera tendre continuellement le point γ vers C, & qui ſera égale à $\frac{J}{C\gamma^2} \times \frac{J^2}{(J+S)^2}$, ne viendra point de l'attraction de la maſſe C; ce ſera une force abſolument étrangere à la gravitation, mais dont il eſt permis de ſuppoſer l'éxiſtence dans une hypothèſe purement Mathématique, comme l'eſt celle que nous faiſons ici. Il faut remarquer de plus que le point γ, en décrivant autour du point C l'ellipſe dont il s'agit, participe néceſſairement à tous les mouvemens du point C dans l'eſpace abſolu; ainſi ce point γ eſt animé par des forces égales & parallèles à celles qui agiſſent ſur la Comète C.

XIII.

1. Donc les forces qui animent le point γ, conſidéré comme ſe mouvant dans l'eſpace abſolu, ſont;

1°. La force vers $C = \frac{J}{GS^2} \times \frac{J^2}{(J+S)^2}$, ou, ce qui eſt la même choſe, une force ſuivant $\gamma C = \frac{J}{J' S^2}$, à cauſe de $GS = \frac{J' S \cdot J}{J+S}$.

2°. Une force ſuivant γL égale & dans le même ſens

que la force $\frac{J}{J' S^2}$ qui agit sur la Comète C suivant CL parallèle à $J' S$, & en sens contraire à la direction de l'action de la Planète sur le Soleil.

3°. Une force suivant $\gamma\,\Gamma$ parallèle à $C\,S$, & égale à $\frac{S+C}{S\,C^2}$ ou $\frac{S+C}{\Gamma\,\gamma^2}$.

4°. Une force suivant $\gamma\,i$ parallèle à $C\,J'$, & égale à $\frac{J}{J'\,C^2}$, ou $\frac{J}{\gamma\,i^2}$.

2. Or en premier lieu, de ces quatre forces, les deux premieres se détruisent absolument. Donc le point γ est attiré dans l'espace absolu par deux forces seulement; l'une vers Γ, qui sera égale à $\frac{S+C}{\gamma\,\Gamma^2}$; l'autre vers i, qui sera $= \frac{J}{\gamma\,i^2}$.

3. La force suivant $\gamma\,\Gamma$ se change en deux autres forces; l'une suivant $\gamma\,S = \frac{(S+C)\,\gamma\,S}{\gamma\,\Gamma^3}$; & l'autre suivant $\gamma\,L = \frac{(S+C)\,S\,\Gamma}{\gamma\,\Gamma^3} = \frac{(S+C)\,.\,C\,\gamma}{\gamma\,\Gamma^3}$;

4. Donc le point γ se meut dans l'espace absolu autour du point S supposé fixe, comme si ce point γ étoit attiré, 1°. vers S par une force $= \frac{(S+C)\,\gamma\,S}{\gamma\,\Gamma^3}$. 2°. Suivant $\gamma\,L$ parallèle à $J\,S$ par une force $= \frac{(S+C)\,.\,C\,\gamma}{\gamma\,\Gamma^3}$. 3°. Enfin avec une force $= \frac{J}{\gamma\,i^2}$ vers un point mo-

bile i, qu'on ſuppoſe ſe mouvoir autour de S, en décrivant une ellipſe ſemblable à celle du point J', & à une diſtance $iS = J'S - C\gamma = J'S - SG = \frac{J'S \times S}{S+J}$.

5. Cette derniere action ſuivant γi produit encore deux forces; l'une ſuivant $\gamma C = \frac{J}{\gamma i^2} \times \frac{iS}{\gamma i} = \frac{J.iS}{\gamma i^3}$; l'autre ſuivant $\gamma S = \frac{J.S\gamma}{\gamma i^3}$.

XIV.

1. Si la diſtance SC de la Comète au Soleil eſt conſidérablement plus grande que la diſtance $C\gamma$ ou GS qui eſt toujours très-petite, on pourra au lieu de la force $\frac{(S+C)\gamma S}{\gamma \Gamma^3}$, écrire $\frac{S+C}{\gamma S^2} - \frac{3(S+C)\gamma C \text{ cof. } \gamma Si}{\gamma S^3}$; & au lieu de la force ſuivant γL, la force $+\frac{(S+C).C\gamma}{\gamma S^2}$ $\times$ cof. γSi ſuivant γS, & la force $\frac{(S+C)\,C\gamma \text{ ſin. } \gamma Si}{\gamma S^3}$ perpendiculaire à γS.

2. De plus, au lieu des forces $\frac{J.iS}{\gamma i^3}$ & $\frac{J.S\gamma}{\gamma i^3}$, ſuivant γC & γS, on peut ſubſtituer dans tous les cas, les forces équivalentes $\frac{J.S\gamma}{\gamma i^3} - \frac{J.iS \text{ cof. } \gamma Si}{\gamma i^3}$ ſuivant γS, & $-\frac{J.iS.\text{ ſin. } \gamma Si}{\gamma i^3}$ perpendiculaire à γS; & ſi la diſtance γS eſt fort grande par rapport à la diſtance iS, on pourra encore, au lieu de ces deux

dernieres forces, ſubſtituer $\frac{J}{S\gamma^2} + \frac{3J.iS\,\text{cof.}\,\gamma Si}{S\gamma^3}$ $- \frac{J.iS\,\text{cof.}\,\gamma Si}{S\gamma^3}$ ſuivant γS, & $- \frac{J.iS\,\text{ſin.}\,\gamma Si}{S\gamma^3}$ perpendiculaire à γS.

XV.

1. Or lorſque la Comète ſera dans les régions ſupérieures de ſon orbite où elle eſt fort éloignée du Soleil, $S\gamma$ ſera fort grande par rapport à Si, & à plus forte raiſon par rapport à $C\gamma$; donc en combinant toutes les forces ci-deſſus, & remarquant que $J.iS = \frac{J.J'S\times S}{S+J}$ $= S\times C\gamma$, & que $(S+C)C\gamma$ peut être cenſé égal à $S.C\gamma$, on trouvera qu'un grand nombre de ces forces ſe détruiſent, & que le point γ eſt tiré ſeulement vers S par une force $= \frac{S+C+J}{S\gamma^2}$, ſans aucune autre force perturbatrice ſenſible.

2. De-là réſulte cette Propoſition très-curieuſe; que quand la Comète eſt dans les régions ſupérieures de ſon orbite, le petit Satellite γ que nous avons ſuppoſé autour d'elle, eſt attiré vers le point fixe S par une force égale à $\frac{S+C+J}{S\gamma^2}$, ſans aucune autre force perturbatrice ſenſible.

3. On voit aiſément combien cette Propoſition ſi ſimple peut abréger le calcul des perturbations. Car lorſque la Comète eſt dans la partie ſupérieure de ſon orbite,

il n'y aura qu'à chercher ſimplement l'ellipſe décrite autour de S par le Satellite γ en vertu de la force attractive $\frac{S+C+J}{S\gamma^2}$, & mener enſuite par chaque point γ de cette ellipſe une ligne γC parallèle à SJ', & $= \frac{J \cdot J'S}{S+J}$; & on aura le lieu C de la Comète.

4. Ceux qui ont calculé juſqu'à préſent les perturbations des Comètes, ont bien trouvé, par une méthode qui leur eſt particuliere, & qui eſt très-différente de la précédente, que quand la Comète eſt dans les régions ſupérieures de ſon orbite, on peut abréger conſidérablement le calcul des perturbations cauſées par l'action de la Planète perturbatrice ſur le Soleil. Mais ils n'ont pas remarqué (ce qui n'étoit pas moins important) que le calcul pouvoit encore être conſidérablement abrégé, en combinant l'action de la Planète ſur la Comète avec ſon action ſur le Soleil. C'eſt la conſidération du Satellite γ qui nous a menés à cette ſimplification du Problême.

5. Nous y avons été conduits d'une maniere aſſez naturelle, par la remarque que nous y avions déja faite dans nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, ſeconde Partie, Art. 218 & 219, que pour trouver la perturbation d'une Planète, cauſée par l'action d'une autre Planète ſur le Soleil, on pouvoit imaginer autour de la Planète troublée un Satellite qui produiſît à peu-près le même effet. De legers changemens à cette ſuppoſition, par leſquels nous l'avons ſimplifiée, nous ont

donné le Satellite fictif autour de la Comète.

6. Au reſte cette Propoſition ſur l'orbite ſenſiblement elliptique du Satellite γ, a été communiquée à M. Clairaut, le 13 Août 1759, long-tems avant qu'il ait rien paru ſur la théorie du mouvement des Comètes; & je l'avois communiquée à M. Bezout dès le mois de Juin précédent. Elle ſe trouve d'ailleurs dans des papiers remis au Secrétariat de l'Académie dans les mêmes mois de Juin & d'Août 1759. Je rapporte ces faits, uniquement afin qu'on ne me taxe pas d'avoir rien appris ſur cela d'aucun autre Géometre, ni rien emprunté d'aucun autre Ouvrage.

XVI.

La conſidération du Satellite γ, a non-ſeulement l'avantage d'abréger conſidérablement le calcul des perturbations dans les parties ſupérieures de l'orbite de la Comète; elle a de plus 1°. celui de rendre dans certaines occaſions ce calcul poſſible; 2°. de le rendre plus éxact dans tous les cas; 3°. de le rendre plus court. Développons ces trois points.

1°. La conſidération du Satellite a l'avantage de rendre le calcul poſſible dans certaines occaſions; car lorſque la Comète eſt dans les parties ſupérieures de ſon orbite, la force perturbatrice $\frac{J}{J'S^2}$ qui vient de l'action de la Planète ſur le Soleil, peut être très-comparable à la force de gravitation $\frac{S+C}{SC^2}$; parce que SC peut alors

être si grande par rapport à $J'S$, que la force $\frac{J}{J'S^2}$ ne puisse pas être regardée comme très-petite par rapport à la force $\frac{S+C}{SC^2}$. Or en ce cas la solution générale donnée dans le commencement de ce Mémoire, & qui suppose les forces φ & π toujours très-petites par rapport à $\frac{Faa}{xx}$, ne pourroit plus avoir lieu. Au contraire la méthode que nous venons de donner, est évidemment d'autant plus éxacte, que SC ou $S\gamma$ est plus grande par rapport à $J'S$. Ainsi (ce qui est très-curieux à remarquer) la méthode générale & celle-ci, sont en quelque maniere le complément l'une de l'autre, l'une étant plus éxacte à proportion que l'autre l'est moins.

2°. Je dis outre cela, que cette considération du Satellite rend le calcul plus éxact; car elle dispense de connoître dans les parties supérieures de l'orbite, la position de la Planete perturbatrice, sur laquelle on pourroit se tromper considérablement, savoir d'une quantité proportionnelle à l'altération de la révolution dans toute une moitié de l'orbite. Supposons, par exemple, que cette altération soit d'environ un an, comme elle le peut être & au-delà; on se tromperoit donc d'un an, c'est-à-dire, à-peu-près de 30 degrés, dans la position de Jupiter; ce qui occasionneroit des erreurs considérables dans la détermination des forces φ & π, & sur-tout de la derniere, qu'on pourroit faire d'un signe contraire à celui qu'elle auroit réellement.

3°.

3°. Enfin la méthode tirée de la considération du Satellite, rendra le calcul plus court que si on cherchoit directement les perturbations de la Comète. Car soit γ' (*fig.* 10.) la projection du Satellite γ sur le plan de l'orbite de la Comète; les forces perturbatrices φ & ϖ venant de la seule action de la Planète sur le Soleil, seront à-très-peu-près $\varphi = -\frac{2(S+C).C\gamma'\cos.\gamma'SJ}{x^3}$, en nommant $S\gamma'$, x; & $\pi = \frac{(S+C).C\gamma'\sin.\gamma'SJ}{S\gamma'^3}$, ou $\frac{(S+C).C\gamma'.\sin.\gamma'SJ}{x^3}$. Or puisque x^3 se trouve ici au dénominateur de la valeur de π; il s'ensuit que les quantités $\frac{\pi\,du}{u^3\,dz}$ ou $\frac{\pi x^3\,du}{dz}$, & $\int \pi x^3\,dz$, dont on a besoin (§. VI & X.) pour calculer les perturbations, seront très-simplifiées; puisque u^3 & x^3 disparoîtront de ces quantités: ce qui n'auroit pas lieu, si on cherchoit directement les perturbations de l'orbite de la Comète, causées par l'action de la Planète perturbatrice sur le Soleil.

XVII.

1. Puisque dans l'orbite décrite par le Satellite, la force rétardatrice dérivée de l'action sur le Soleil, est de l'ordre de $\frac{J.\xi}{x^3}$, & que dans l'orbite réelle de la Comète, cette force est de l'ordre de $\frac{J}{\xi^2}$; il s'ensuit que ces deux forces sont entr'elles comme ξ^3 à x^3; & qu'ainsi

dans la partie inférieure de l'orbite, depuis le périhélie jusqu'au point où $x = \xi$, il eſt plus éxact d'employer la méthode générale, & que dans le reſte de l'orbite, qui eſt beaucoup plus étendu, il ſera mieux d'employer la conſidération du Satellite.

2. Ainſi, pour calculer l'action de Jupiter ſur une Comète quelconque, on peut partager l'orbite en deux parties; dans l'une qui s'étend depuis le périhélie de part & d'autre juſqu'à la diſtance $S\,C$ ou $S\,c$ (*fig.* 13.) = à la diſtance moyenne de Jupiter, on employera la méthode générale. Dans la ſeconde qui eſt beaucoup plus étendue, on employera la conſidération du Satellite.

3. Pour calculer l'action de Saturne, on peut employer les deux mêmes portions; car quoique $S\,C$ ne ſoit qu'environ la moitié de la diſtance de Saturne, cependant les quantités qu'on négligera en employant la conſidération du Satellite dès ce point C, ſeront de l'ordre de $\frac{S \cdot \mathfrak{h}\,\mathfrak{h}\,\xi'^3}{S^3\,x^4}$; ($\mathfrak{h}$ exprimant la maſſe de Saturne, & ξ' ſa diſtance au Soleil), c'eſt-à-dire, de l'ordre de $\frac{S}{x^3} \times \frac{\mathfrak{h}\,\mathfrak{h}\,\xi'^3}{S^3\,x^3}$; & elles ſeront aux quantités $\frac{\mathfrak{h}}{\xi'^3}$, qu'on employeroit en ſuivant la méthode générale, dans la raiſon de $\frac{\mathfrak{h}\,\xi^4}{S\,x^4}$ à 1, c'eſt-à-dire, d'environ $\frac{16}{3000}$ à l'unité, ou de 1 à 187; par conſéquent elles ſeront incomparablement plus petites que celles qu'on auroit employées en ſuivant la méthode générale; & il faut remarquer de plus que

ces quantités négligées, (ou ce rapport de 1 à 187) diminuent toujours à mesure qu'on s'éloigne du point C, où $S\,C$ est supposé = à la moyenne distance de Jupiter : ensorte que lorsque la Comète est à la distance de Saturne, ce rapport devient $\frac{1}{3000}$. On n'aura donc point à craindre, ce me semble, d'erreur considérable en commençant au point C (où $S\,C$ est = à la distance moyenne de Jupiter) la considération du Satellite, même pour calculer l'action de Saturne.

XVIII.

1. Il ne reste plus qu'à savoir en quel endroit de cette portion de l'orbite, on peut supposer que le Satellite commence à décrire une véritable ellipse. Or je crois qu'on peut fixer (pour l'action de Jupiter) le commencement de cette portion au point où $\xi = \frac{1}{3}x$; c'est-à-dire, où la Comète est à une distance du Soleil triple de celle de Jupiter. Car supposons (ce qui est ici le cas le moins favorable) que Jupiter se trouve alors le plus près de la Comète qu'il est possible; son action sur la Comète sera donc $\frac{J}{(x-\xi)^2}$; quantité à laquelle nous avons substitué les deux termes $\frac{J}{x^2} + \frac{2J.\xi}{x^3}$; ainsi la quantité négligée est $\frac{J}{(x-\xi)^2} - \frac{J}{x^2} - \frac{2J.\xi}{x^3}$; or supposant $x = 3\xi$, on trouvera que cette quantité négligée est $\frac{J}{4\xi^2} - \frac{J}{9\xi^2} - \frac{2J}{27\xi^3} = \frac{J}{\xi^2} \times \left(\frac{1}{4} -\right.$

$\frac{5}{27}$); quantité plus petite que la quantité $\frac{2J.\xi}{x^3}$, ou $\frac{2J}{27\xi^2}$ que d'autres Géometres ont cru pouvoir négliger en pareil cas.

2. Le rapport de la premiere de ces quantités à la seconde, deviendra encore plus petit à mesure que la Comète s'éloignera plus du Soleil; car soit $x = n\xi$, n étant plus grand que 3; la premiere de ces quantités sera à la seconde comme $\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3}$ est à $\frac{2}{n^3}$; c'est-à-dire, comme $3n - 2$ à $2(n-1)^2$: rapport qui devient plus petit à mesure que n augmente.

3. Quant à la force π, la quantité *négligée* est à-peu-près $\frac{3\xi^2 \text{ sin. } \zeta' \text{ cos. } \zeta'.J}{x^4}$; en prenant ζ' pour l'angle de commutation entre la Comète & la Planète; & cette quantité est à la quantité *employée* $\frac{J \text{ sin. } \zeta'.\xi}{x^3}$, comme $\frac{3\xi \text{ cos. } \zeta'}{x}$ est à 1, c'est-à-dire, comme cos. ζ' est à 1; elle est donc beaucoup plus petite, puisque la plus grande valeur de la quantité *négligée* est à-peu-près répondante à cos. $\zeta' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou sin. $2\zeta' =$ sin. total. Donc la quantité que nous négligeons dans l'expression de π, est moindre que la quantité $\frac{J\xi \text{ sin. } \zeta'}{x^3}$, négligée en pareil cas par d'autres Géometres.

4. Donc, en n'ayant égard qu'à l'action de Jupiter, on peut ſuppoſer que le Satellite décrive une ellipſe, à commencer depuis le point où $x = 3\xi$; & l'erreur, s'il y en a quelqu'une, ſera du moins fort au-deſſous de celle que d'autres Géometres ont commiſe en négligeant les forces perturbatrices $\frac{2J.\xi}{x^3}$ & $\frac{J.\xi}{x^3}$, qui réſultent de l'action du Soleil en pareil cas.

5. A l'égard de l'action de Saturne; comme ſa maſſe eſt environ $\frac{1}{3}$ de celle de Jupiter, ſi on ſuppoſe la diſtance de la Comète au Soleil double de celle de Saturne, on trouvera que la quantité *négligée* (dans le cas où elle eſt la plus grande) eſt $\frac{J}{3.\xi'^2} \times (1 - \frac{1}{2}) = \frac{J}{6\xi'^2}$, en prenant ξ' pour la diſtance de Saturne au Soleil: cette quantité eſt à la quantité $\frac{2J}{27\xi^2}$ négligée par d'autres Géometres dans l'action de Jupiter, à-peu-près comme $\frac{9}{4}$ eſt à $\frac{\xi'^2}{\xi^2}$; c'eſt-à-dire, qu'elle eſt beaucoup plus petite, ξ' étant environ le double de ξ. D'où il s'enſuit qu'au point où la diſtance de la Comète eſt à-peu-près double de la diſtance de Saturne au Soleil, on peut négliger la force φ qui vient de l'action de Saturne; car en ce point la force négligée eſt au-deſſous de celle que d'autres Géometres ont négligée pour l'action de Jupiter.

6. Quant à la force π, il eſt aiſé de voir que la partie négligée eſt beaucoup moindre que $\frac{J}{3.\xi'^2}$ ſin. ζ', &

que par conſéquent cette partie négligée eſt à la force $\frac{2J}{27\xi^2}$ négligée par d'autres dans l'action de Jupiter, en moindre raiſon que $\frac{1}{8.3}$ n'eſt à $\frac{1}{27}$; d'où il s'enſuit que la partie négligée eſt, ou beaucoup plus petite, ou au moins très-peu différente de la force négligée $\frac{2J}{27\xi^2}$; & par conſéquent qu'on peut auſſi négliger cette partie de force. Ainſi au point où la diſtance de la Comète au Soleil eſt à-peu-près double de celle de Saturne, on peut ſuppoſer que le Satellite décrit ſans erreur ſenſible une ellipſe autour du Soleil.

7. Donc en n'ayant égard qu'à l'action de Saturne, on peut ſuppoſer que le Satellite décrive une ellipſe depuis le point où $x = 2\xi'$; c'eſt-à-dire, où la diſtance de la Comète eſt double de celle de Saturne. Or comme les diſtances moyennes ξ & ξ' de Jupiter & de Saturne ſont environ 5.2010 & 9.5400, il eſt aiſé de voir qu'au point où x ſera $= 3\xi$, ou du moins dans un point où x ſera un peu plus grand que 3ξ, on aura à-peu-près $x = 2\xi'$.

8. Ce point peut être ſuppoſé celui de la moyenne diſtance de la Comète au Soleil, dans la Comète de 1682, où cette moyenne diſtance eſt 17.8635; mais en général, pour ſimplifier & pour abréger, nous ſuppoſerons que le point où le Satellite commence à décrire ſenſiblement une ellipſe, ſoit celui où $x = 20$ fois le rayon du grand orbe; cette ſuppoſition rendra même les calculs

plus éxacts, puiſque dans le point dont il s'agit, x ſera $> 2\xi'$, & égal à près de 4ξ.

9. On peut donc dans le calcul de l'action de Jupiter & de celle de Saturne, commencer la conſidération du Satellite, au point où la diſtance x de la Comète au Soleil eſt égale à la diſtance moyenne de Jupiter; & regarder de plus ce Satellite comme décrivant très-ſenſiblement une ellipſe, dans toute la partie de l'orbite où la diſtance x de la Comète au Soleil eſt égale ou plus grande que 20 fois le rayon du grand orbe.

10. Au reſte, ſi on craignoit de cette ſuppoſition quelque erreur dont l'effet fût un peu trop conſidérable, nous donnerons dans la ſuite de ce Mémoire des moyens de la rectifier.

11. Voyons préſentement d'autres méthodes pour abréger encore le calcul.

XIX.

1. Comme l'orbite de la Comète, & celle que décrit le Satellite dans l'eſpace abſolu, different très-peu quant à la figure, & quant au tems employé à parcourir ces orbites & leurs parties correſpondantes; l'altération que les mêmes forces perturbatrices cauſeroient dans chacune de ces orbites, ſeroit ſenſiblement la même; c'eſt pourquoi on peut regarder toutes ces altérations, comme ſi elles ſe rapportoient à la ſeule orbite $ACED$ (*fig.* 13.) de la Comète, & du reſte traiter comme des portions d'ellipſes, les portions d'orbites décrites par la

Comète & par le Satellite. Nous développerons ce dernier point plus en détail dans la ſuite; pour le préſent nous nous appliquerons à chercher la méthode la plus ſimple pour déterminer les altérations de l'orbite *ACED*.

2. Dans cette orbite il faut d'abord marquer les points *C*, *c*, ou $x =$ la moyenne diſtance de Jupiter, & les points *E*, *e*, ou $x = 20$ fois le rayon du grand orbe, & ſe rappeller enſuite tout ce que nous avons déja dit ci-deſſus; ſavoir, 1°. que depuis *A* juſqu'en *C*, & depuis *c* juſqu'en *A*, les forces perturbatrices doivent être exprimées comme dans le §. IX; 2°. que depuis *C* juſqu'en *E*, & depuis *e* juſqu'en *c*, elles changent d'expreſſion, & deviennent ce que l'on a vû dans les §. XIII & XIV; 3°. que depuis *E* juſqu'en *e* la force φ devient $\frac{J}{x^2}$, ou Ju^2, & que la force $\pi = o$.

3. Pour faire maintenant uſage de toutes ces valeurs, il faudra d'abord connoître les valeurs de φ & de π pour deux révolutions de la Comète, ou plutôt pour une révolution entiere, & une grande partie de la révolution ſuivante juſqu'au point *e*, en obſervant; 1°. de donner à φ & à π depuis *A* juſqu'en *C*, les valeurs indiquées dans le §. IX; 2°. depuis *C* juſqu'en *E*, les valeurs indiquées par le §. XIV; 3°. de faire $\pi = o$, & $\varphi = Ju^2$ depuis *E* juſqu'en *e*; 4°. de faire encore changer φ & π de valeur aux points *e* & *c*, c'eſt-à-dire, de leur donner depuis *e* juſqu'en *c* les valeurs marquées dans le §. XIV, & au point *c* celles du §. IX, qu'on continuera juſqu'au point *C* de

la

la révolution ſuivante ; après quoi on reprendra les valeurs de φ & π, telles qu'elles ſont dans le §. XIV &c.

4. Cette détermination des valeurs de φ & de π n'aura aucune difficulté ; car dans toute la partie $E\,D\,e$, la force π n'eſt pas cenſée exiſter, non plus que la partie de la force φ qui dépend de l'élongation de la Planète à la Comète ; & dans la partie $E\,A\,e$, on connoît aſſez bien les valeurs de φ & de π, parce qu'on connoît (*hyp.*) le tems d'une révolution entiere de la Comète, & qu'ainſi on aura à-peu-près les poſitions reſpectives de la Planète & de la Comète dans tous les points des arcs $A\,E$, $A\,e$ de la premiere révolution, & dans l'arc $A\,E$ de la ſeconde.

5. Les forces φ & π étant connues, on connoîtra les quantités $\frac{\pi\,x^3}{a\,a\,g\,g}$, que je nomme . . . . . Y,

Et on aura ſoin pour abréger le calcul ; 1°. de ne pas calculer deux fois les quantités (conſtantes ou variables) qui ſe trouvant au numérateur & au dénominateur, devront ſe détruire ; par exemple x^3 qui ſe trouvant au dénominateur (§. XIV.) dans une partie des valeurs de π, ſe trouvera au numérateur dans $\pi\,x^3$, & par conſéquent diſparoîtra ; 2°. de mettre à part ſans la calculer la quantité conſtante $g\,g$, que nous enſeignerons dans la ſuite à faire diſparoître, & de la laiſſer en attendant ſous ſa forme Algébrique $g\,g$.

6. Ayant formé la table des Y, on quarrera (*a*) la

(*a*) Nous donnerons plus bas les moyens de quarrer les différentes courbes méchaniques qui ſe rencontreront dans cette ſolution.

courbe dont l'aire eſt $\int Y\,dz$, pour la premiere révolution entiere, & pour la ſuivante juſqu'au point e; en obſervant que la partie de cette aire qui répond à l'angle EDe doit être $= o$; parce que dans toute cette partie la force $\pi = o$.

7. Cette quantité $\int Y\,dz$, ou $\int \frac{\pi x^3\,dz}{a\,a\,g\,g}$ eſt la plus compliquée de celles qui entrent dans la quantité M du §. VI; les autres n'éxigeant aucune quadrature, ſeront très-faciles à calculer.

8. On trouvera ainſi toutes les quantités d'où dépend la quantité M du §. VI; & l'on ſuppoſera

$$M \text{ ou } (\S.\text{ IX.}) \frac{2S}{g\,g}\int\frac{\pi a^4\,dz}{u^3\,g\,g} - \frac{\phi a^4}{u^2\,g\,g} + \frac{\pi a^4\,du}{g\,g\,u^3\,dz} = X + 2S\int\frac{Y\,dz}{g\,g};$$

en prenant X pour repréſenter la ſomme des quantités $\frac{\pi a^4\,du}{g\,g\,u^3\,dz} - \frac{\phi a^4}{u^2\,g\,g}$, & $S\int Y\,dz$ pour repréſenter la quantité $S\int\frac{\pi a^4\,dz}{u^3\,g\,g}$; on ſe reſſouviendra de plus (comme nous venons de le dire) que Y ſera $= o$ dans la partie EDe de l'orbite, où $\pi = o$, & que X ſera conſtante dans cette même partie de l'orbite, où $\phi = \frac{f}{x^2}$. Cela poſé,

9. On verra d'abord que dans l'équation générale de l'orbite, la quantité $\text{cof. } z\int M\,dz\,\text{ſin. } z - \text{ſin. } z\int M\,dz\,\text{cof. } z$, ou α (ainſi que nous l'avons déja nommée §. X.) ſera $= \text{cof. } z\int X\,dz\,\text{ſin. } z - \text{ſin. } z\int X\,dz\,\text{cof. } z + \text{cof. } z\times$

$\frac{2S}{gg}(1-\text{cos. }z)\int Y dz - \text{cos. } z \times \frac{2S}{gg}\int Y dz$

$(1-\text{cos. } z) - \text{sin. } z \times \frac{2S}{gg}\text{ sin. } z \int Y dz + \text{sin. } z \times \frac{2S}{gg}$

$\int Y dz \text{ sin. } z$; quantité qui peut encore être simplifiée, en considérant que $(\text{cos. } z - \text{cos. } z^2 - \text{sin. } z^2)\int Y dz =$ $(\text{cos. } z - 1)\int Y dz$.

10. Pour trouver présentement le tems t, soit $x' = \frac{aa}{\frac{S+C}{gg} + (a - \frac{S+C}{gg})\text{ cos. } z}$; & soient les quantités

$$-\int \frac{2x'^3\, dz\, \text{cos. } z}{a^3 g} = P,$$

$$\int \frac{2x'^3\, dz\, \text{sin. } z}{a^3 g} = Q,$$

$$-\int \frac{2x'^3\, dz}{a^3 g}(\text{cos. } z - 1) = R,$$

$$\int \frac{2x'^3\, dz\, \text{cos. } z}{a^3 g} = -P,$$

$$-\int \frac{2x'^3\, dz\, \text{sin. } z}{a^3 g} = -Q,$$

$$-\int \frac{x'^3\, dz}{a^3 g} = V$$; & l'on aura (§. X.) l'altération du tems égale à $\int dP \int X dz \text{ sin. } z + \int dQ \int X dz$ $\text{cos. } z + \int dR \int Y dz \times \frac{2S}{gg} + \frac{2S}{gg}\int dP \int Y dz$ $(1-\text{cos. } z) - \frac{2S}{gg}\int dQ \int Y dz \text{ sin. } z + \int dV \int Y dz$.

11. Comme les quantités P, Q, R, V, ont des intégrales éxactes, ou du moins peuvent s'intégrer par des

arcs de cercle, ainſi que nous le ferons voir plus bas; on peut ſimplifier l'expreſſion précédente, & la délivrer des doubles ſignes $\int$, en la mettant ſous cette forme,

$$P\int X\,dz \text{ ſin. } z - \int XP\,dz \text{ ſin. } z + Q\int X\,dz \text{ cof. } z - \int XQ\,dz \text{ cof. } z + 2R\,S\int\frac{Y\,dz}{gg} - 2S\int\frac{YR\,dz}{gg} - \frac{2S}{gg}P\int Y\,dz\,(1 - \text{cof. } z) + \frac{2S}{gg}\int YP\,dz\,(1 - \text{cof. } z) - \frac{2S}{gg}Q\int Y\,dz \text{ ſin. } z + 2S\int\frac{YQ\,dz}{gg} \text{ ſin. } z + V\int Y\,dz - \int YV\,dz.$$

12. Toutes ces quantités ne ſeront pas fort difficiles ni fort longues à calculer; parce que les quantités P, Q, R, V, comme on vient de le dire, ont des intégrales éxactes, ou du moins peuvent s'intégrer par arcs de cercle, & que le reſte ne demandera que des quadratures ſimples.

13. Nous donnerons dans la ſuite les moyens de trouver facilement ces quantités P, Q, R, S &c. & d'abréger d'ailleurs beaucoup le reſte du calcul; nous nous contenterons d'obſerver ici que la formule que nous venons de donner, n'a l'inconvénient d'allonger le calcul que dans un cas. C'eſt celui où X eſt conſtante; c'eſt-à-dire, où $\varphi = \int u^2$, π & Y étant alors $= o$; car alors les quantités $P\int X\,dz$ ſin. $z - \int XP\,dz$ ſin. $z + Q\int X\,dz$ cof. $z - \int XQ\,dz$ cof. z ſont d'un uſage moins commode que leurs équivalentes $\int dP\int X\,dz$ ſin. $z + \int dQ\int X\,dz$ cof. z.

14. Pour éviter cet inconvénient qui n'a lieu que dans la partie $E\,D\,e$ de l'orbite, laquelle répond à un assez petit angle $E\,S\,e$, on écrira (pour cette partie seulement de l'orbite) au lieu de $-\int X\,P\,dz$ sin. $z - \int Q\,X\,dz$ cos. z, la quantité $-PX\,(\Delta - \text{cos. } z) + \int dP \times X\,(\Delta - \text{cos. } z) - QX(\delta' - \text{sin. } z) + \int X\,dQ\,(\delta' - \text{sin. } z)$, Δ & δ' étant ce que deviennent cos. z & sin. z au point E, & les aires $X\int dP\,(\Delta - \text{cos. } z)$ & $X\int dQ \times (\delta' - \text{sin. } z)$ étant supposées $= o$ au même point E.

15. Il est à remarquer encore que pour réduire en tems la *quantité Algébrique qu'on vient de trouver ci-dessus* pour l'altération du tems, il faut d'abord nommer δ le demi-grand axe de l'ellipse que la Comète auroit décrite sans l'action des Planètes, & ensuite faire cette proportion: comme $\frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{S+C}} \times 4$ angles droits, (qui est la valeur de $\int \frac{x\,x\,dz}{a\,g}$ lorsque $z = 360^{o}$) est à *cette quantité Algébrique trouvée*, qui exprime l'altération du tems; ainsi le tems m de la révolution de la Comète est à une quatriéme quantité; c'est-à-dire, qu'il faut multiplier la quantité Algébrique trouvée par $\frac{m\sqrt{S+C}}{\delta^{\frac{1}{2}} \times 360^{\circ}}$, qu'on peut réduire à $\frac{m\sqrt{S}}{\delta^{\frac{1}{2}} \times 360^{\circ}}$, pour deux raisons; la premiere, parce que C est fort petit par rapport à S, & que $\frac{m\sqrt{S}}{\delta^{\frac{1}{2}} \times 360^{\circ}}$ multiplie une quantité déja très-petite par

rapport à la révolution totale; la seconde, parce que C est inconnu (α).

16. C'est pourquoi, en mettant pour $\frac{1}{360^\circ}$ (c'est-à-dire, pour le rapport du rayon à la circonférence) sa valeur approchée $\frac{1}{6,283185}$, on aura pour la correction du tems

$$\frac{m\sqrt{S}}{S^{\frac{3}{2}}.6,283185} \times [P\int X\,dz \sin.z - \int XP\,dz \sin.z + Q\int X\,dz \cos.z - \int XQ\,dz \cos.z + \frac{2R.S}{gg}\int Y\,dz - \frac{2S}{gg}\int R.Y\,dz - \frac{2S.P}{gg} \times \int Y\,dz(1-\cos.z) + \frac{2S}{gg}\int Y.P\,dz(1-\cos.z) - \frac{2S}{gg}Q\int Y\,dz \sin.z + \frac{2S}{gg}\int Y.Q\,dz \sin.z + V\int Y\,dz - \int Y.V\,dz].$$

XX.

Supposons maintenant une Comète dont on a déjà observé une révolution; on veut savoir la valeur approchée de la révolution suivante.

1. Soit SA la distance perihélie observée au commen-

(α) On demandera peut-être comment on sait que la masse C de la Comète est fort petite par rapport à la masse S du Soleil, puisqu'on ignore cette masse C. Il est aisé de répondre, que comme la Comète ne dérange point sensiblement le Soleil, on est en droit d'en conclure que $\frac{C}{S}$ est une très-petite fraction.

cement de la premiere révolution; & m = au nombre de jours, auſſi connu, de cette révolution; on conſtruira l'ellipſe $ACDA$ (*fig.* 5.) dont le grand axe convienne à cette révolution; & que j'appellerai, quoiqu'improprement, l'ellipſe primitive; dans cette ellipſe on marquera les points $C, c; E, e$, comme on l'a déja preſcrit au commencement du §. XIX, art. 2. Cela fait;

2. On cherchera d'abord les lieux de la Planète correſpondans aux lieux de la Comète dans cette ellipſe. Ces lieux pourront ſe trouver aſſez éxactement; 1°. parce que dans toute la partie EDe, où ils ſeroient plus incertains, on n'a pas beſoin de les connoître; 2°. parce que dans la premiere révolution, l'altération que cauſe la Planète ſur l'arc AE, n'eſt pas conſidérable, & que le tems employé réellement par la Comète à décrire l'angle ASE, ne differe que peu de celui que la Comète mettroit à décrire le même angle (indépendamment des perturbations) dans l'ellipſe primitive ſuppoſée; 3°. parce que, comme l'on connoît (par l'hypothèſe) le tems du retour de la Comète au point A après la premiere révolution, on ſait auſſi à-très-peu-près le tems où la Comète ſera ſur chaque rayon vecteur de l'arc eA de la premiere révolution, & par conſéquent les poſitions reſpectives de la Planète perturbatrice; 4°. parce que par la même raiſon on ſait à-très-peu-près le tems où la Comète ſe trouvera dans chaque point de l'arc AE de la ſeconde révolution, & par conſéquent les poſitions reſpectives de la Planète perturbatrice.

3. Je ſuppoſe donc qu'on ait calculé par la méthode du §. XIX, que je développerai & ſimplifierai encore dans la ſuite, les altérations de cette orbite elliptique $AEDA$ pour une révolution entiere, & pour la révolution ſuivante juſqu'au point e.

4. J'appelle la quantité qu'on trouvera pour l'altération totale juſqu'au point e de la ſeconde révolution . . . $\mathfrak{C}$

Et je nomme la quantité qui exprime les altérations de la premiere révolution ſeulement . . . . . $\mathfrak{a}$

5. De plus ayant calculé dans l'ellipſe $AEDA$ le tems que la Comète met à décrire l'arc AC, ou plutôt l'angle ASC, je connoîtrai à la fin de ce tems la poſition, la direction & la viteſſe du petit Satellite γ (*fig.* 14.), le tout rapporté ſur l'orbite de la Comète; & comme la viteſſe de ce Satellite dans l'eſpace abſolu, eſt compoſée de ſa viteſſe propre autour de C & de la viteſſe du point C, j'aurai donc la poſition $S\gamma$ du rayon vecteur, & la viteſſe du point γ par rapport au point S, avec ſa direction; au moyen de quoi je déterminerai facilement la trajectoire elliptique du Satellite γ, abſtraction faite des autres perturbations qui ont déja été calculées.

6. Ainſi j'aurai une portion d'ellipſe $\gamma o \gamma'$, dans laquelle je détermine de la maniere ſuivante le rayon $S\gamma'$ qui doit la terminer. Je ſuppoſe qu'on tire la ligne Sc dont la poſition eſt connue, & qui fait avec AS un angle $= CSA$: par la connoiſſance que l'on a du retour de la Comète au point A, on ſait à-peu-près le tems où la Comète ſe trouvera ſur cette ligne Sc; & par conſéquent

on

on fait aussi à-peu-près la position respective de la Planète perturbatrice & du petit Satellite; supposons donc que $S\lambda$ représente cette position, c'est-à-dire, soit égale & parallèle à la ligne qui joint en ce moment la Comète & le Satellite; & soit menée par λ la ligne $\lambda\gamma'$, parallèle à Sc, elle coupera l'ellipse $\gamma o \gamma'$ au point γ', qui fera connoître par conséquent le rayon $S\gamma'$ & la portion d'ellipse $\gamma o \gamma'$. Je donnerai dans la suite des moyens de calculer toutes ces lignes & ces angles; mais il n'est question encore ici que de l'exposé général de la méthode.

7. Je connoîtrai donc par ce moyen le tems employé à parcourir cette portion d'ellipse $\gamma o \gamma'$;

J'appelle ce tems . . . . . θ',

Et le tems par AC . . . . . θ.

8. Maintenant lorsque le Satellite est en γ', il est évident que la Comète est à-très-peu-près en C', en menant $\gamma' C' =$ & parallèle à $S\lambda$; car lorsque la Comète est sur la ligne SC', $S\lambda$ représente à-très-peu-près la position du Satellite. Par-là on connoîtra la longueur de la ligne SC'. Or la vitesse du point C' autour de S est évidemment composée de la vitesse du point γ' dans l'orbite $\gamma o \gamma'$, & de la vitesse du même point γ' autour de C'; laquelle doit être transportée au point C' en *sens contraire* à celui selon lequel le Satellite se meut autour de la Comète, & non pas dans le même sens, comme on l'a fait au point γ.

9. Donc on aura une nouvelle ellipse $C' A' C''$ (*fig.* 15.)

dans laquelle le rayon vecteur primitif SC', & la viteſſe primitive avec ſa direction ſeront connues.

10. On calculera le mouvement dans cette ellipſe $C'AC''$, juſqu'à ce qu'on arrive à un point C'', tel que SC'' ſe trouve ſur la direction de la ligne SC.

11. Dans ce point C'' on connoît à-peu-près le tems; puiſqu'il eſt à-peu-près égal au tems connu de la révolution entiere, plus au tems par l'angle ASC dans l'ellipſe primitive; ainſi on connoîtra à-peu-près la poſition & la viteſſe correſpondantes du Satellite γ''; & on cherchera (comme on a fait à la premiere révolution) ſa nouvelle ellipſe $\gamma''\sigma'\Gamma$, juſqu'à un point Γ, où $S\Gamma$ ſoit égale à 20 fois le rayon du grand orbe.

12. Soit à préſent le tems calculé par $C'A'C''$ . . . . = ⊙
Et le tems calculé par $\gamma''\sigma'\Gamma$ . . . . . = ⊙′
Soit auſſi le tems par $C'A'$ . . . . . = ϑ,
SA' étant ſuppoſée dans la direction de la diſtance initiale SA de la Comète au Soleil.

13. Cela poſé, il eſt évident, en raſſemblant toutes les quantités calculées, que le tems de la premiere révolution ſera . . . . . = $\alpha' + \beta + \beta' + \vartheta$; & que le tems de la premiere révolution, plus le tems par la plus grande partie de la ſeconde, juſqu'à l'arrivée du Satellite en Γ, ſera . . . . = $\zeta + \beta + \beta' + \odot + \odot'$.

14. Ce tems ſeroit éxactement celui qu'on cherche, ſi on eût pris pour l'ellipſe primitive de la Comète, celle qu'elle eût *réellement* décrite ſans l'action des Planètes. Mais 1°. les perturbations ſeront à-très-peu-près les mê-

mes ; que ſi on eût pris cette derniere ellipſe. 2°. Pour corriger d'ailleurs (quant au reſte du calcul), l'hypothèſe qu'on a faite d'une fauſſe ellipſe, on remarquera d'abord que le rayon Se de la fig. 13. fait un très-petit angle avec le rayon $S\Gamma$ de la fig. 15. qui lui eſt égal ; d'où il s'enſuit, que quand le Satellite ſera en Γ (*fig.* 15.), la Comète ſera à-peu-près au point e de la figure 13. ou $Se =$ au rayon du grand orbe ; conſéquemment on fera cette proportion ; l'aire entiere $AEDA$ (*fig.* 13.) eſt à deux fois cette aire, moins le ſecteur AeS, ou AES, comme m eſt à un quatriéme terme m' ; ce quatriéme terme m' donnera le tems que la Comète auroit mis (indépendamment des forces perturbatrices) à parvenir ſur le rayon Se pour la ſeconde fois dans l'ellipſe primitive ſuppoſée $AEDA$; & dans cette même ſuppoſition on aura à-très-peu-près $\zeta + \theta + \theta' + \Theta + \Theta' = m'$ pour la perturbation totale juſqu'au point e ; perturbation qui ſera à-très-peu-près la même, comme on vient de le dire, que la perturbation réelle ; on aura de même $\zeta' + \theta + \theta' + \Theta = m$ pour la perturbation de la premiere révolution ſeulement.

25. Il eſt à remarquer que chacune de ces perturbations eſt celle qui provient de l'action d'une ſeule Planète, de Jupiter par exemple ; on trouvera de même celle qui provient de l'action de Saturne. Cela fait, on ajoutera enſemble les deux perturbations, & on nommera la perturbation totale de la premiere révolution . . . . δ ; & la perturbation de la premiere révolution, plus celle

de la seconde jusqu'en e . . . . . $\mathfrak{el}$

Il est évident 1°. que $m - \mathfrak{s}$ sera le tems par la *véritable ellipse primitive*, & qu'ainsi ce tems exprime celui qu'il eût fallu supposer indépendamment des perturbations. 2°. Que par conséquent on trouvera facilement l'ellipse qui ayant la même distance périhélie $A S$ que la Comète, donneroit pour révolution le tems $m - \mathfrak{s}$, indépendamment des forces perturbatrices; & que cette ellipse sera la *vraie ellipse primitive* de la Comète. 3°. Qu'on trouvera de même très-facilement le tems de la révolution dans la partie de cette ellipse qui répond à l'arc circulaire $A x \epsilon'$, terminé par le rayon $A \epsilon'$ qui coincide avec $A e$, soit ce tems $= m''$; & comme la perturbation ϵ est sensiblement la même dans l'ellipse primitive supposée, & dans la véritable ellipse primitive, on aura $m - \mathfrak{s} + m'' + \epsilon$ pour le tems de la révolution de la Comète, depuis le moment où elle part de son périhélie, jusqu'à celui où elle arrive pour la seconde fois sur le rayon $S e$; donc aussi $m - \mathfrak{s} + m'' + \epsilon$ exprimera à-très-peu près le tems de l'arrivée du Satellite au point E (*fig.* 15.).

16. Ainsi on connoîtra à-très-peu-près (par ce dernier tems calculé) la position de la Planète perturbatrice, & par conséquent la position $\Gamma C'''$ (*fig.* 15.) du Satellite Γ par rapport à la Comète C'''; ou plutôt la position de la Comète C''' par rapport au Satellite Γ (*a*).

(*a*) Si l'on craignoit que ce calcul ne fût pas assez exact, il faudroit,

17. Par conſéquent on pourra tracer, ſuivant la méthode déja donnée pour le point C', une nouvelle ellipſe $C''' A''$ (*fig.* 13.) dans laquelle on calculera facilement le tems par l'angle $C''' S A''$; on ſuppoſera ce dernier tems . . . . . $= \vartheta'$.

18. Après cela on achevera de chercher les altérations dans l'arc qui termine la ſeconde révolution; ces altérations ne ſeront plus difficiles à calculer. Car 1°. on connoît à-peu-près par l'art. précédent le tems où la Comète eſt au point C'''. 2°. En calculant le tems par l'angle $e' S A$ dans l'*ellipſe primitive ſuppoſée* (tems qui differe peu de celui que la Comète met réellement à parcourir cet angle $e' S A$ ou $C''' S A''$ pour arriver de nouveau à ſon périhélie) on connoîtra à-peu-près le tems où la Comète ſe trouve ſur chaque rayon vecteur; ainſi on connoîtra à-peu-près les poſitions de la Planète perturbatrice dans l'eſpace de la ſeconde révolution de la Comète, qui eſt renfermé par l'angle $C''' S A''$; par ce moyen on achevera le calcul des altérations dans l'*ellipſe primitive ſuppoſée*, pour deux révolutions entieres; calcul qui avoit déja été fait pour une révolution totale, & pour la partie $A E D e$ (*fig.* 13.) de la ſeconde révolution.

---

après avoir trouvé, par ce premier calcul, la poſition de $S C'''$ & par conſéquent l'angle $A S C'''$ ou $A S e'$ (*fig.* 13.), recommencer les opérations, depuis celle du N°. 14, pag. 130, en mettant le ſecteur $A e' S$ au lieu du ſecteur $A e S$ ou $A E S$, & l'arc $A x$ au lieu de $A x'$; & on aura pour lors une poſition plus éxacte de $S C'''$. Mais pour l'ordinaire la premiere opération ſuffira, ſans qu'on ait beſoin de recourir à cette ſeconde.

19. Soit la quantité des altérations dans l'angle $C'''SA''$ . . . . . $= \vartheta''$; on aura donc pour le tems de deux révolutions entieres (en ſuppoſant que m fût le tems de la révolution, ſans perturbations, dans l'ellipſe primitive) $6 + \theta + \theta' + \Theta + \Theta' + \vartheta' + \vartheta''$; or dans la même ſuppoſition on a déja vû que $\alpha' + \theta + \theta' + \vartheta$ auroit été le tems de la premiere révolution.

20. Donc retranchant cette ſeconde quantité de la premiere, on aura la valeur de la ſeconde révolution, toujours dans la même hypothèſe; & retranchant enſuite de nouveau la premiere révolution de la ſeconde, on aura une quantité que j'appelle ω, & qui ſera la différence des deux révolutions en vertu de l'action d'une ſeule Planète perturbatrice, dans le cas où m auroit été le tems d'une révolution, ſans perturbation.

21. Or la différence des révolutions doit être ſenſiblement la même, quelque ellipſe primitive que l'on ſuppoſe, pourvû que le tems par cette ellipſe ne differe pas beaucoup de la véritable. Donc ω ſera à-très-peu-près la différence *réelle* des deux révolutions ſucceſſives en vertu de l'action d'une ſeule Planète perturbatrice; de Jupiter, par exemple. On trouvera de même la différence des révolutions en vertu de l'action de Saturne; enſuite on ajoutera les deux différences avec leurs ſignes, & on nommera leur ſomme ω'; & comme (*hyp.*) m eſt la valeur réelle de la premiere révolution, on aura $m + \omega'$ pour la valeur de la ſeconde. On connoîtra donc par ce

moyen la valeur approchée de la ſeconde révolution ; & par conſéquent on pourra prédire à-peu-près le tems du retour de la Comète, en ſuppoſant que l'on connoiſſe par obſervation le tems de la premiere révolution.

22. Encore une fois, nous expliquerons dans la ſuite en détail les différentes opérations, par leſquelles toutes ces différentes quantités ſe calculent ; il n'eſt queſtion ici que du précis général de la méthode.

XXI.

1. L'orbite de la Comète, depuis ſon périhélie juſqu'à 90 degrés de part & d'autre de ce point, pouvant être traitée comme une Parabole, ſur-tout dans le calcul des perturbations, il réſulte de cette conſidération un nouveau moyen d'abréger les calculs précédens. Car les quantités P, Q, R, V du §. XIX, art. 10, ſont alors toutes abſolument intégrables, & réductibles à des formules très-ſimples, comme on le fera voir plus bas, en donnant la valeur de ces quantités pour l'hypothèſe Parabolique.

2. De plus lorſque la diſtance périhélie de la Comète eſt plus petite, ou même n'eſt que fort peu plus grande que la moitié du rayon du grand orbe, comme dans celle de 1682 ; & que d'ailleurs, comme dans la même Comète de 1682, & dans pluſieurs autres, l'inclinaiſon des deux orbites eſt telle, que la diſtance accourcie de la Planète au Soleil reſte conſidérablement plus grande que la diſtance périhélie de la Comète (par exemple, 8

à 9 fois plus grande); on peut encore trouver des moyens d'abréger le calcul. Car si la distance perihélie est éxactement égale à la moitié du rayon du grand orbe, on trouvera que pendant que la Comète parcourroit 90 degrés en longitude depuis son perihélie, Jupiter ne parcourroit que 3 degrés environ, & Saturne beaucoup moins (*a*). Ainsi on pourra regarder alors la Planète perturbatrice, comme à-peu-près immobile pendant ces 90 degrés de mouvement de la Comète; sur-tout si on suppose la Planète perturbatrice placée au milieu de l'espace très-petit qu'elle décrit pendant ce tems. Car cette supposition n'altérera presqu'en rien la valeur des forces accélératrices. Or par ce moyen les valeurs des forces φ & π, ou du moins les parties de ces forces qui viennent de l'action des Planètes sur le Soleil, seront beaucoup plus aisées à calculer. Car 1°. la valeur de ξ pourra être regardée comme constante, ainsi que celle de la vraie distance $\xi \sqrt{1 + mm \sin. V^2}$ de la Planète au Soleil. 2°. L'angle ζ sera $= A + z$, A étant la valeur de l'angle d'élongation ASJ (*fig.* 10.) de la Planète à la Comète périhélie.

3. Si la distance périhélie étoit un peu plus grande que la moitié du rayon du grand orbe; on pourroit alors,

(*a*) Cette Comète mettroit moins de 40 jours à parcourir ces 90 degrés. Or le mouvement moyen diurne de Jupiter est à-très-peu près de 5′ par jour, & celui de Saturne de 2′. Donc le mouvement de Jupiter en 40 jours est de 3° 20′, & celui de Saturne de 1° 20′.

pour

pour plus d'éxactitude, ſe contenter de ſuppoſer Saturne ſeul en repos pendant les 90 degrés que parcourt la Comète; & diviſer cet eſpace pour Jupiter en deux autres, pendant l'un deſquels on ſuppoſera Jupiter immobile.

XXII.

1. Dans la même ſuppoſition de $AS =$ à environ la moitié du rayon du grand orbe; ſi l'inclinaiſon de l'orbite de la Planète perturbatrice, eſt telle que la diſtance de cette Planète au Soleil, rapportée ſur l'orbite de la Comète, ſoit environ 9 à 10 fois (ou davantage) plus grande que la diſtance périhélie de la Comète, on pourra encore abréger conſidérablement le calcul, depuis le périhélie juſqu'à 90 degrés de part & d'autre. Car alors JS à 90 degrés du périhélie, ſera environ cinq fois plus grande pour Jupiter, & neuf fois pour Saturne, que la diſtance de la Comète au Soleil; & au périhélie JS ſera dix fois plus grande pour Jupiter, & dix-huit fois pour Saturne: de plus les forces perturbatrices qui viennent de l'action de Jupiter & de Saturne ſur la Comète, ſont alors conſidérablement plus petites que l'attraction vers le Soleil; car à 90 degrés du périhélie A, la force de Jupiter, en la ſuppoſant la plus grande poſſible, eſt environ $\frac{1}{16000}$ de la gravitation, & la force de Saturne $\frac{1}{64 \times 3000}$; & au périhélie, ces forces ſont encore beaucoup plus petites.

2. C'eſt pourquoi, en nommant ξ' la diſtance réelle & ſuppoſée conſtante de la Planète au Soleil, & ξ ſa diſtance accourcie auſſi ſuppoſée conſtante, on aura à-très-peu-près pour cette portion de l'orbite $\varphi = \frac{J.\text{cof.}\zeta.\xi}{\xi'^3} + \frac{J.x}{\xi'^3} - \frac{J.\xi\,\text{cof.}\,\zeta}{\xi'^3} - \frac{3J.\xi^2 x\,\text{cof.}\,\zeta^2}{\xi'^5} = \frac{J.x}{\xi'^3} - \frac{3J.x.\xi^2\,\text{cof.}\,\zeta^2}{\xi'^5}$; &

$$x = \frac{J.\xi.\text{ſin.}\,\zeta}{\xi'^3} - \frac{J.\xi\,\text{ſin.}\,\zeta}{\xi'^3} - \frac{3J.x.\xi^2\,\text{ſin.}\,2\zeta}{2\xi'^5} = -\frac{3J.x\xi^2\,\text{ſin.}\,2\zeta}{2\xi'^5};$$

& on ſe reſſouviendra que $\zeta = A + z$; ce qui fournira encore un nouveau moyen de ſimplifier & d'abréger le calcul.

XXIII.

1. En effet, puiſque $\text{cof.}\,A + z = \text{cof.}\,z\,\text{cof.}\,A - \text{ſin.}\,z\,\text{ſin.}\,A$, & que $\text{ſin.}\,A + z = \text{ſin.}\,z\,\text{cof.}\,A + \text{cof.}\,z\,\text{ſin.}\,A$; qu'enfin $x = \frac{a.a}{P' + Q'\,\text{cof.}\,z}$, P' & Q' étant des conſtantes, & que ξ eſt une conſtante auſſi; il s'enſuit que ſi on fait $P' + Q'\,\text{cof.}\,z = u$, ce qui donnera $\text{cof.}\,z = \frac{u - P'}{Q'}$, & $\text{ſin.}\,z = \sqrt{1 - \left(\frac{u - P'}{Q'}\right)^2}$, les intégrales qu'il faudra trouver pour déterminer les perturbations depuis le périhélie A juſqu'à 90 degrés de part & d'autre, ne contiendront d'autre radical que le précédent $\sqrt{1 - \frac{(u - P')^2}{Q'^2}}$, & des fonctions rationnelles de

ſa ſeule variable u; ce qui rendra les intégrations fort faciles, puiſque les différentielles ſeront, ou intégrables abſolument, ou réductibles à des arcs de cercle. J'en donnerai plus bas le calcul.

2. On peut même obſerver que depuis le périhélie A juſqu'à 90 degrés de part & d'autre, l'orbite de la Comète pouvant être cenſée une Parabole, on aura à-très-peu-près $x = \frac{2u}{1+\cos z}$; ce qui rendra encore les calculs plus ſimples & les intégrations plus faciles, le radical $\sqrt{1-\frac{u-P'}{Q'}}$ ſe réduiſant alors à $\sqrt{u-uu}$; on verra ci-deſſous plus en détail ces différentes opérations.

3. Lorſque l'orbite de la Comète fait un grand angle avec celle de la Planète perturbatrice; ſi la diſtance périhélie eſt d'ailleurs peu différente de la moitié du rayon du grand orbe, ou beaucoup plus petite; on peut encore alors abréger le calcul, non pas autant à la vérité que dans le cas où l'angle des deux orbites n'eſt pas très-conſidérable; mais on pourra du moins ſuppoſer que la partie de la force φ qui vient de l'action de la Planète ſur le Soleil, eſt $\frac{J.\xi\cos.(A+z)}{\xi'^3} = \frac{J.\xi}{\xi'^3}\times(\cos.A.\cos.z - \sin.z\sin.A)$; & que la partie correſpondante de la force ϖ, eſt $\frac{J.\xi\sin.(A+z)}{\xi'^3} = \frac{J.\xi}{\xi'^3}\times(\sin.A\cos.z + \sin.z\cos.A)$.

4. On objectera peut-être que si l'angle des deux orbites est fort grand, comme de 80 degrés, la position & la grandeur de la distance accourcie ξ peuvent beaucoup varier pendant le tems que la Comète employe à parcourir 90 degrés depuis le périhélie. A cela nous répondrons, qu'alors la force perturbatrice $\frac{J.\xi}{s}$ seroit si petite, qu'on pourroit même la négliger; & que d'ailleurs la force $\frac{J.\xi.\text{cos.}\,A+z}{\xi'}$ étant aussi elle-même très-petite, & ne pouvant jamais différer considérablement de la véritable force perturbatrice, il n'y aura jamais d'inconvénient à substituer cette force $\frac{J.\xi\,\text{cos.}\,A+z}{\xi'^3}$, à la véritable force suivant CS, qui vient de l'action de la Planète sur le Soleil, & dont le calcul seroit beaucoup plus compliqué, sans être beaucoup plus éxact.

5. Nous ajouterons encore, que si pendant les 90 degrés de mouvement de la Comète, on craignoit que la Planète perturbatrice n'eût un mouvement trop sensible pour pouvoir être négligé; on pourroit alors, au lieu de 90 degrés depuis le périhélie, n'en prendre que 60, ou 45, ou moins encore, & du reste achever le calcul de la même maniere. Cet abrégé peut avoir lieu, même pour des Comètes dont la distance périhélie seroit beaucoup plus grande que la moitié du rayon du grand orbe, & pour celles même où elle seroit un peu plus grande que ce rayon entier.

XXIV.

1. Voilà donc des moyens d'abréger conſidérablement le calcul des perturbations des Comètes ; 1°. pour toutes les Comètes en général dans la partie ſupérieure de leur orbe, depuis le point où la diſtance de la Comète eſt égale à vingt fois ou environ le rayon du grand orbe. 2°. Pour les Comètes qui ont leur diſtance périhélie à peu près égale, ou beaucoup moindre que la moitié du rayon du grand orbe, comme celle de 1682, & un très-grand nombre d'autres. 3°. Enfin pour les Comètes qui, comme celle de 1682, & pluſieurs autres, ſont telles, que leur diſtance périhélie eſt beaucoup moindre que la diſtance moyenne de la Planète au Soleil, rapportée ſur l'orbite de la Comète. Car dans la partie inférieure de l'orbe de ces Comètes, contenant 90 degrés en-deçà & au-delà du périhélie, c'eſt-à-dire, 180 degrés en tout, on pourra, ſans avoir recours à des quadratures de courbes méchaniques, déterminer les perturbations par le ſeul moyen des quadratures qui ſe réduiſent à des arcs de cercle ; on pourra même ſe paſſer de ces arcs, & avoir des intégrales éxactes & des quadratures abſolues, ſi on conſidere, ainſi qu'on le peut, cette portion de la trajectoire de la Comète comme une Parabole.

2. Il n'y aura que la partie de l'orbite qui s'étendra depuis 90 degrés du périhélie juſqu'aux points E, e (*fig.* 13.), où les quadratures de courbes méchaniques ſeront néceſſaires ; mais nous avons déja donné ci-deſſus différens

moyens de les ſimplifier ; & nous y en ajouterons encore d'autres dans l'application que nous allons bientôt faire de notre méthode à une Comète particuliere.

3. Avant que d'entrer dans ce détail, il nous reſte à donner quelques lemmes qui nous ſont néceſſaires pour éxécuter plus facilement les différentes opérations que nous aurons à faire. Nous ſupprimerons les démonſtrations de la plûpart de ces lemmes, parce qu'elles ſont faciles à déduire des §. précédens, ou qu'elles ſont d'ailleurs connues des Géometres.

XXV.

Les mêmes noms étant ſuppoſés que dans les §. précédens, & nommant de plus δ le demi-grand axe de l'ellipſe primitive, & x' les rayons de cette ellipſe, qui répondent aux anomalies vraies z ; on aura, abſtraction faite des forces perturbatrices

1. $x' = \dfrac{aa}{\frac{S+C}{gg} + \left(a - \frac{S+C}{gg}\right)\cos.z}$ ou

2. $x' = \dfrac{2a\delta - aa}{\delta + (\delta - a)\cos.z}$.

3. Le demi-parametre p du grand axe, ſera

$p = \dfrac{aagg}{S+C}$, ou

4. $\dfrac{2a\delta - aa}{\delta} - \dfrac{aagg}{S+C}$.

Donc

5. $p = 2a - \frac{aa}{\delta}$.

6. $gg = \frac{2.\overline{S+C}}{a} - \frac{S+C}{\delta}$,

ou

7. $gg = \frac{(S+C)p}{aa}$.

8. cof. $z = \frac{2a\delta - aa}{x'(\delta - a)} - \frac{\delta}{\delta - q}$;

Si on appelle s la cotangente de l'angle ACS (*fig.* 13.), que fait un rayon quelconque avec l'ellipſe, on aura

9. $s = \frac{(\delta - a)\text{ ſin. } z}{\delta + (\delta - a)\text{ cof. } z}$,

ou

10. $s = \frac{(\delta - q)\text{ ſin. } z}{(2a\delta - aa)m}$.

11. Le quarré de la viteſſe $v^2 = gg + \frac{2.\overline{S+C}}{x'} - \frac{2.\overline{S+C}}{a}$

$= (S+C)\left(\frac{p}{aa} + \frac{2}{x'} - \frac{2}{a}\right)$.

Et ſi l'ellipſe n'eſt pas fort excentrique, on pourra ſuppoſer, ſans erreur conſidérable, $vv = \frac{gg\,aa}{x'x'} = \frac{\overline{S+C}.p}{x'x'}$.

Si la trajectoire étoit une Parabole, il faudroit dans les quantités précédentes regarder δ comme infinie, & l'on auroit

12. $x' = \frac{2a}{1 + \text{cof. } z}$.

13. $p = 2a$.

14. $gg = \frac{2.\overline{S+C}}{a}$.

15. Cos. $z = \frac{2a}{x'} - 1$.

XXVI.

Si la viteſſe primitive étoit g, la diſtance primitive a; c la cotangente du ſupplément ACS de l'angle de projection (a), & ſon ſinus h, & enfin z les angles d'anomalie, à compter depuis le point de départ; on auroit

1. $x' = \frac{2a}{\frac{S+C}{g^2h^2} + \left(c - \frac{S+C}{g^2h^2}\right)\text{cos. } z - c \text{ ſin. } z}$

ou

2. $x' = \frac{2a}{\frac{S+C}{g^2h^2} + \frac{c\,a}{\text{ſin. } A'}\text{cos. } A' + z}$ (A' étant l'angle compris entre le rayon a, & la ligne du périhélie).

3. Tang. $A' = \frac{c\,a}{a - \frac{S+C}{g^2h^2}}$, l'angle A' étant pris du côté oppoſé à celui ſuivant lequel ſont ſuppoſés marcher les z.

4. $\frac{2a^2g^2h^2}{S+C} = p$.

5. $2d = \frac{2a}{\frac{S+C}{g^2h^2} + \frac{c\,a}{\text{ſin. } A'}} + \frac{2a}{\frac{S+C}{g^2h^2} - \frac{c\,a}{\text{ſin. } A'}}$.

6. Le quarré de la viteſſe en un point quelconque

(a) On ſuppoſe ici que l'angle de projection (c'eſt-à-dire, l'angle de la ligne de projection CH avec le rayon vecteur) eſt obtus; c'eſt pourquoi la cotangente de ſon complément ACS à 180 degrés, eſt poſitive.

$vv = gg$

$$vv = gg + \frac{2\cdot\sqrt{S+C}}{x'} - \frac{2\cdot\sqrt{S+C}}{a} = (S+C)\left(\frac{p}{aahh} + \frac{2}{x'} - \frac{2}{a}\right).$$

XXVII.

1. Le tems employé à parcourir un angle quelconque (en partant du périhélie) est $\frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{S+C}}$ multiplié par l'angle dont le cosinus est $\frac{\delta - x'}{\delta - a}$, moins $\frac{(\delta - a)\sqrt{\delta}}{\sqrt{S+C}}$ multiplié par le sinus du même angle.

Donc si on nomme

2. α, l'angle dont le cosinus est $\frac{\delta - x'}{\delta - a}$,

3. On aura le tems cherché $t = \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{S+C}}\left(\alpha - \frac{\delta - a}{\delta}\right.$ sin. $\left.\alpha\right)$

Et si on appelle m le tems de la révolution totale, on aura ce même tems,

4. $t = \frac{m}{360^\circ} \times \left(\alpha - \frac{\delta - a}{\delta}\right.$ sin. $\left.\alpha\right)$.

Au lieu de l'angle dont le cos. est $\frac{\delta - x'}{\delta - a}$, on peut mettre (ce qui revient au même)

5. $\alpha =$ l'angle dont le cosinus est $\frac{\delta - a + \delta \text{ cos. } z}{\delta + (\delta - a) \text{ cos. } z}$, ou

6. Cos. $\alpha = \frac{\frac{\delta - a}{\delta} + \text{cos. } z}{1 + \frac{\delta - a}{\delta} \text{ cos. } z}$, ou

7. $\text{Cof. } \alpha = \dfrac{1 + \dfrac{\delta}{\delta - a} \text{ cof. } \zeta}{\dfrac{\delta}{\delta - a} + \text{cof. } \zeta}$.

Par conſéquent, ſi la Comète eſt ſuppoſée commencer à partir d'un point dont l'élongation au périhélie ſoit A', on aura en comptant toujours les angles A', α du périhélie,

8. $t = \dfrac{m}{360} \left[\alpha - A' - \left(\dfrac{\delta - a}{\delta} \right) \text{ſin. } \alpha + \dfrac{\delta - a}{\delta} \text{ ſin. } A' \right]$.

Il faut remarquer de plus que

9. La diſtance périhélie $a = \dfrac{a\,z}{\dfrac{S + C}{g^2\,h^2} + \dfrac{z\,a}{\text{ſin. } A^2}}$.

XXVIII.

1. Si l'on conſtruiſoit une autre ellipſe, dans laquelle le rayon primitif fût . . . . . a',
La viteſſe primitive . . . . . g',
La cotangente du ſupplément de l'angle de projection, z',
Son ſinus . . . . . h',
L'angle compris entre le point de départ & & le périhélie . . . . . A'',
Le parametre . . . . . p',
Le demi-grand axe . . . . . δ',
Le tems de la révolution . . . . . m',
La diſtance périhélie . . . . . a',

On auroit les mêmes équations que dans le §. pré-

cédent, en marquant seulement les lettres d'un trait, pour distinguer les deux cas.

2. Il faut de plus remarquer, que si on suppose que la vitesse g' soit telle par rapport à la vitesse g, que l'on ait $g'g' = gg + (S+C)\mu$, on aura $\frac{S+C}{g'^2 h'^2} = \frac{S+C}{g^2 h'^2 + (S+C) h'^2 \mu}$; & en mettant pour g^2 sa valeur $\frac{(S+C)p}{aahh}$, il viendra

3. $$\frac{S+C}{g'^2 h'^2} = \frac{aahh}{p h'^2 + aa h^2 h'^2 \mu}.$$

Et si l'on suppose que la quantité $(S+C)\mu$ soit très-petite par rapport à gg, & que h' differe peu de h, on pourra supposer

4. $$\frac{S+C}{g'^2 h'^2} = \frac{aa}{\frac{p h'^2}{h^2} + aa\mu}.$$

On n'oubliera pas de remarquer aussi que

5. $$m' = \frac{m \times \delta'^{\frac{3}{2}}}{\delta^{\frac{3}{2}}}.$$

6. Et que le quarré de la vitesse $v''v'$ en un point quelconque $= g'g' + \frac{2.\overline{S+C}}{x'} - \frac{2.\overline{S+C}}{a'}$.

XXIX.

1. Soit $\frac{dz}{(q+\cos. z)^2}$ une quantité à intégrer, & soit $\frac{1}{q+\cos. z} = y$; on aura pour transformée

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{\varrho\varrho-1}\cdot\sqrt{-\frac{1}{\varrho\varrho-1}+\frac{2\varrho y}{\varrho\varrho-1}-yy}}.$$

2. Si $\rho = 1$, la transformée ſera $\frac{y\,dy}{\sqrt{2y-1}}$.

3. Si la différentielle propoſée eſt $\frac{dz}{(\varrho+\text{cof. } z)^3}$, la transformée ſera $\frac{y^3\,dy}{\sqrt{\varrho\varrho-1}\sqrt{-\frac{1}{\varrho\varrho-1}+\frac{2\varrho y}{\varrho\varrho-1}-yy}}$.

4. Si $\rho = 1$, la transformée ſera $\frac{y^2\,dy}{\sqrt{2y-1}}$.

5. En général ſi $\rho = 1$, on aura $\text{cof. } z = \frac{1-y}{y}$; $\text{ſin. } z = \frac{\sqrt{2y-1}}{y}$; $dz = -\frac{d(\text{cof. } z)}{\text{ſin. } z} = \frac{dy}{yy} \times \frac{y}{\sqrt{2y-1}} = \frac{dy}{y\sqrt{2y-1}}$; ces formules rendront les transformations & les intégrations fort faciles dans le cas de $\rho = 1$.

XXX.

1. Si on prend le rayon ou ſinus total pour l'unité, l'intégrale de $\frac{dy}{\sqrt{A+2By-yy}}$ (A & B étant des conſtantes quelconques) ſera K, K étant un angle dont le coſinus eſt $\frac{B-y}{\sqrt{A+BB}}$.

2. L'intégrale de $\frac{y\,dy}{\sqrt{A+2By-yy}}$ ſera $-\sqrt{A+BB}$ ſin. $K+B$. K.

3. Celle de $\frac{yy\,dy}{\sqrt{A+2By-yy}}$ ſera $-2B\sqrt{A+BB}$ ſin. $K+\frac{A+BB}{4}$ ſin. $2K+\frac{A+3BB}{2}K$.

XXXI.

Si on ſuppoſe dans le §. XXIX. $\rho=\frac{\delta}{\delta-a}$, on aura

1. $\rho\rho-1=\frac{2a\delta-aa}{(\delta-a)^2}$.

2. $\sqrt{\rho\rho-1}=\frac{\sqrt{2a\delta-aa}}{\delta-a}$;

Donc les quantités A & B de l'article précédent, & celles qui en dépendent, ſeront exprimées par les équations ſuivantes;

3. $B=\frac{\rho}{\rho\rho-1}=\frac{\delta\sqrt{\delta-a}}{2a\delta-aa}$.

4. $A=-\frac{1}{\rho\rho-1}=-\frac{(\delta-a)^2}{2a\delta-aa}$.

5. $A+BB=\frac{1}{(\rho\rho-1)^2}=\frac{(\delta-a)^4}{(2a\delta-aa)^2}$;

6. $\sqrt{A+BB}=\frac{(\delta-a)^2}{2a\delta-aa}$.

7. $B\sqrt{A+BB}=\frac{\delta\sqrt{\delta-a}^3}{(2a\delta-aa)^2}$.

8. $y=\frac{1}{\frac{\delta}{\delta-a}+\text{cof. }z}=\frac{\delta-a}{\delta+(\delta-a)\text{cof. }z}=$ (§. XXV. n. 2.) $\frac{(\delta-a)x'}{2a\delta-aa}$.

9. $\frac{B-\gamma}{\sqrt{A+BB}} = \frac{\delta-x'}{\delta-a}$;

10. Et par conſéquent (§. XXVII. n. 5. & §. XXX. n. 1.) $K = \alpha$; puiſque K eſt l'angle dont le coſinus $= \frac{B-\gamma}{\sqrt{A+BB}}$, & α l'angle dont le coſinus eſt $\frac{\delta-x'}{\delta-a}$.

11. Enfin $A+3BB = \frac{(3\delta\delta-2a\delta+aa)(\delta-a)^2}{(2a\delta-aa)^2}$.

XXXII.

Si dans le §. XXIX. on ſuppoſe $\rho = 1$, on aura

1. L'intégrale de $\frac{y\,dy}{\sqrt{2y-1}} = \frac{(y-\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{3} + \frac{(y-\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$.

2. $\int \frac{yy\,dy}{\sqrt{2y-1}} = \frac{(y-\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}} + \frac{(y-\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{3} + \frac{(y-\frac{1}{2})^{\frac{5}{2}}\sqrt{2}}{5}$.

Et comme dans ce cas $y = \frac{1}{1+\cos.\zeta} = \frac{x}{2a}$ (§. XXV. n. 12.); on aura encore

3. $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{2y-1}} = \frac{\frac{x}{a}-1}{6}\sqrt{\frac{x}{a}-1}\,\sqrt{\frac{x}{a}-1} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{a}-1}\,\sqrt{\frac{x}{a}-1} = \frac{2}{3}$

lorſque $x = 2a$, c'eſt-à-dire, lorſque $\zeta = 90°$.

4. $\int \frac{y\,y\,dy}{\sqrt{2y-1}} = \frac{\frac{x}{a}-1}{4}^{\frac{1}{2}} + \frac{\left(\frac{x}{a}-1\right)}{6}^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{x}{a}-1}{20}^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{15}$ lorsque $z = 90°$.

5. En général si $\frac{1}{1+\text{cos. } z} = \frac{x}{2a}$, on aura cos. $z = \frac{2a}{x} - 1$; sin. $z = \frac{2\sqrt{ax-aa}}{x}$; $dz = -\frac{d(\text{cos. } z}{\text{sin. } z} = \frac{2a\,dx}{xx} \times \frac{x}{2\sqrt{ax-aa}} = \frac{dx\sqrt{a}}{x\sqrt{x-a}}$; ces formules rendront les transformations & les intégrations faciles dans le cas de $\frac{1}{1+\text{cos. } z} = \frac{x}{2a}$.

XXXIII.

Les mêmes choses étant posées que dans le §. XXIX. on aura

1. $\int \frac{dz\,\text{cos. } z}{(\varrho+\text{cos. } z)^3} = \int \frac{dz}{(\varrho+\text{cos. } z)^2} - \varrho\int \frac{dz}{(\varrho+\text{cos. } z)^3}$.

2. $\int \frac{dz\,\text{sin. } z}{(\varrho+\text{cos. } z)^3} = -\frac{1}{2.\overline{\varrho+1}^2} + \frac{1}{2(\varrho+\text{cos. } z)^2}$.

3. $\int \frac{dz\,(\text{cos. } z-1)}{(\varrho+\text{cos. } z)^3} = \int \frac{dz}{(\varrho+\text{cos. } z)^2} - (\varrho+1)\int \frac{dz}{(\varrho+\text{cos. } z)^3}$.

Or on a donné ci-dessus les valeurs de $\int \frac{dz}{(\varrho+\text{cos. } z)^3}$,

& de $\int \frac{d\zeta}{(\rho + \cos.\zeta)^3}$ (§. XXIX, XXX & XXXI.) quelle que soit la valeur de ρ; & dans le §. XXXII. on a donné les valeurs particulieres de ces deux intégrales, dans le cas où $\rho = 1$. Ainsi on aura facilement les valeurs des trois intégrales précédentes, dans le cas de $\rho =$ à un nombre quelconque, & dans celui de $\rho = 1$.

En général si $\rho = 1$, on aura

$$4.\int \frac{d\zeta \cos.\zeta}{(1+\cos.\zeta)^3} = \frac{\sqrt{\frac{x}{a} - 1}}{4} - \frac{\sqrt{\frac{x}{a} - 1}}{20} = \frac{1}{5}$$

lorsque $\zeta = 90°$.

$$5.\int \frac{d\zeta \sin.\zeta}{(1+\cos.\zeta)^3} = \frac{xx}{8aa} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \text{ lorsque } \zeta = 90°.$$

$$6.\int \frac{d\zeta . \sqrt{\cos.\zeta - 1}}{(1+\cos.\zeta)^3} = -\frac{\sqrt{\frac{x}{a} - 1}}{6} - \frac{\sqrt{\frac{x}{a} - 1}}{10}$$

$$= -\frac{4}{15} \text{ lorsque } \zeta = 90°.$$

$$7.\int \frac{d\zeta \sin.\zeta}{(1+\cos.\zeta)^2} = \frac{x}{2a} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ lorsque } \zeta = 90°.$$

$$8.\int \frac{d\zeta \sin.\zeta . \cos.\zeta}{(1+\cos.\zeta)^3} = \int \frac{d\zeta \sin.\zeta}{(1+\cos.\zeta)^2} - \int \frac{d\zeta \sin.\zeta}{(1+\cos.\zeta)^3}$$

$$= \frac{x}{2a} - \frac{xx}{8aa} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \text{ lorsque } \zeta = 90°.$$

$$9.\int \frac{d\zeta}{1+\cos.\zeta} = \sqrt{\frac{x}{a} - 1} = 1 \text{ lorsque}$$

$\zeta = 90°$.

10.

10. $\int \frac{d\zeta \cos.\zeta}{(1+\cos.\zeta)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{d\zeta}{(1+\cos.\zeta)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{d\zeta}{(1+\cos.\zeta)^{\frac{3}{2}}}$

$= + \frac{\frac{x}{a}-1}{2} - \frac{\frac{x}{a}-1}{6} = \frac{1}{3}$ lorſque $\zeta = 90°$.

11. $\int \frac{d\zeta \sin.\zeta^2}{(1+\cos.\zeta)^{\frac{3}{2}}} = -\int \frac{d\zeta}{(1+\cos.\zeta)^{\frac{1}{2}}} + 2\int \frac{d\zeta \cos.\zeta}{(1+\cos.\zeta)^{\frac{3}{2}}}$

$+ 2\int \frac{d\zeta}{(1+\cos.\zeta)^{\frac{3}{2}}} = 2\int \frac{d\zeta}{(1+\cos.\zeta)^{\frac{3}{2}}} - \int \frac{d\zeta}{(1+\cos.\zeta)^{\frac{1}{2}}} =$

$\frac{\frac{x}{a}-1}{3} = \frac{1}{3}$ lorſque $\zeta = 90°$.

12. $\int \frac{d\zeta \cos.\zeta^2}{(1+\cos.\zeta)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{d\zeta}{(1+\cos.\zeta)^{\frac{3}{2}}} - \int \frac{d\zeta \sin.\zeta^2}{(1+\cos.\zeta)^{\frac{3}{2}}}$

$= \frac{\frac{x}{a}-1}{4} - \frac{\frac{x}{a}-1}{6} + \frac{\frac{x}{a}-1}{20} = \frac{2}{15}$ lorſque $\zeta = 90°$.

13. $\int \frac{d\zeta}{(1+\cos.\zeta)^{\frac{7}{2}}} = \frac{\frac{x}{a}-1}{7.8} + 3.\frac{\frac{x}{a}-1}{8.5} +$

$\frac{\frac{x}{a}-1}{8} + \frac{\frac{x}{a}-1}{8} = \frac{12}{35}$ lorſque $\zeta = 90°$.

14. $\int \frac{d\zeta \cos.\zeta}{(1+\cos.\zeta)^{\frac{7}{2}}} = \int \frac{d\zeta}{(1+\cos.\zeta)^{\frac{5}{2}}} - \int \frac{d\zeta}{(1+\cos.\zeta)^{\frac{7}{2}}}$

dont on trouvera la valeur par le n. précédent, & par le n. 4. des art. XXIX & XXXII.

15. $\int \frac{d\zeta \sin.\zeta^2 \cos.\zeta^2}{(1+\cos.\zeta)^3}$ = à l'intégrale de $\frac{dx}{2\sqrt{\frac{x}{a}-1}} \times \frac{x^2}{a^2} \times \frac{x-a}{x^2} \times \frac{\sqrt{xx-4ax+4aa}}{x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{a\sqrt{\frac{x}{a}-1}} \times \sqrt{\frac{x}{a}-1} \times \frac{\sqrt{xx-4ax+4aa}}{x^2}$; cette intégrale étant prise de maniere qu'elle ſoit = 0 lorſque $x = a$.

Mais on peut encore trouver autrement cette intégrale, en remarquant que $\int \frac{d\zeta \sin.\zeta^2 \cos.\zeta^2}{(1+\cos.\zeta)^3} = \int \frac{d\zeta(-\cos.\zeta^4 + \cos.\zeta^2)}{(1+\cos.\zeta)^3} = \int d\zeta(3 - \cos.\zeta) - \int \frac{5\,d\zeta \cos.\zeta^2}{(1+\cos.\zeta)^3} - \int \frac{8\,d\zeta \cos.\zeta}{(1+\cos.\zeta)^3} - \int \frac{3\,d\zeta}{(1+\cos.\zeta)^3}$; l'intégrale des deux premiers termes eſt $3\zeta - \sin.\zeta$; & l'intégrale des trois derniers eſt aiſée à trouver par les précédens n°. 4 & 12. & par le §. XXXII. n°. 4.

16. $\int \frac{d\zeta \sin.\zeta^3 \cos.\zeta}{(1+\cos.\zeta)^3}$ ſe trouvera de même égal à l'intégrale de $\frac{(x-4)(2a-x)\,dx}{ax^2} = \text{Log.}\frac{x^2}{a^2} + \frac{2a}{x} - \frac{x}{a} - 1 = \text{Log. } 8 - 2$, lorſque $\zeta = 90°$.

17. $\int \frac{d\zeta \sin.\zeta \cos.\zeta^3}{(1+\cos.\zeta)^3}$ ſera égal à l'intégrale de $\frac{\sqrt{2a-x}^3 \cdot dx}{4a^2x^2} = -\frac{2a}{x} + \frac{3x}{2a} - \frac{x^2}{8a^2} + \frac{5}{8} + \text{Log.}\frac{a^2}{x^2} = -\text{Log. } 8 + \frac{3\zeta}{8}$ lorſque $\zeta = 90°$.

18. $\int \frac{d\zeta \cos.\zeta^2}{(1+\cos.\zeta)^4}$ sera égal à l'intégrale de $\frac{x\,dx}{16\,aa\sqrt{\frac{x}{a}-1}} \times \frac{\overline{2a-x}^2}{a^3}$, ou, ce qui revient au même, sera égal à l'intégrale de $\frac{d\zeta}{(1+\cos.\zeta)^2} - \frac{2\,d\zeta\cos.\zeta}{(1+\cos.\zeta)^3} - \frac{d\zeta}{(1+\cos.\zeta)^4}$, qu'on trouvera par le §. XXXII. n°. 3, & par les n°. 13 & 14 du préſent Paragraphe.

19. $\int \frac{d\zeta \sin.\zeta \cos.\zeta}{(1+\cos.\zeta)^4} =$ à l'intégrale de $\frac{x\,dx}{8\,aa} \times \frac{\overline{2a-x}}{a} = \frac{x^2}{8a^2} - \frac{x^3}{24\,a^3} - \frac{7}{12} = \frac{1}{12}$ lorſque $\zeta = 90°$.

20. $\int \frac{d\zeta \sin.\zeta}{(1+\cos.\zeta)^4} = \int \frac{x^2\,dx}{8\,a^3} = \frac{x^3}{24\,a^3} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$ lorſque $\zeta = 90°$.

21. $\int \frac{d\zeta \sin.\zeta \cos.\zeta^2}{(1+\cos.\zeta)^4} = \int \frac{dx}{8\,a} \cdot \frac{\overline{2a-x}^2}{aa} = \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{4aa} + \frac{x^3}{24\,a^3} - \frac{7}{24} = \frac{1}{24}$ lorſque $\zeta = 90°$.

22. $\int \frac{d\zeta \sin.\zeta^3 \cos.\zeta}{(1+\cos.\zeta)^4} = \int \frac{dx}{4\,a} \times \frac{\overline{2a-x}}{a} \times \sqrt{\frac{x}{a}-1}$

$\frac{\frac{1}{2}}{\qquad}$ $\frac{\frac{3}{2}}{\qquad}$

$= \frac{\frac{x}{a}-1}{\qquad} - \frac{\frac{x}{a}-1}{\qquad} = \frac{1}{15}$ lorſque $\zeta = 90°$.

$\frac{6}{\qquad}$ $\frac{10}{\qquad}$

23. $\int \frac{d\zeta \cos.\zeta^3}{(1+\cos.\zeta)^4} = \int \frac{dx}{16\,a\sqrt{\frac{x}{a}-1}} \times \frac{\overline{2a-x}^3}{a^3}$

ou plutôt $= \int \frac{dz \cos. z}{(1+\cos. z)^4} - \int \frac{dz \sin. z^2 \cos. z}{(1+\cos. z)^4}$, qu'on trouvera par les n°. 14 & 22.

24. Nous ne pouſſerons pas plus loin ces formules, qui peuvent être de grand uſage dans la Théorie des Comètes. Les Mathématiciens voyent aiſément combien il leur ſera facile d'en former de ſemblables en cas qu'ils en ayent beſoin, & en général de trouver l'intégrale de $\frac{dz (\sin. z)^m . (\cos. z)^n}{(1+\cos. z)^q}$, m, n & q étant des nombres entiers quelconques.

25. Il eſt à remarquer que ces quantités ſeront toujours les mêmes pour le même angle z, quelle que ſoit d'ailleurs la valeur de a; puiſqu'elles ſont $= o$ lorſque $x = a$, & qu'on les ſuppoſe complettes lorſque $x = 2a$, ou $z = 90°$. Ainſi on fera bien d'en former des tables, dont on pourra ſe ſervir pour toutes les Comètes qui ſe trouvent (§. XXI. XXII & XXIII.) dans les cas où il eſt permis de faire uſage de ces formules, ou d'une partie de ces formules; ces tables une fois dreſſées, abrégeront beaucoup le calcul, comme on le verra dans la ſuite de ce Mémoire.

26. Dans l'expreſſion de toutes les intégrales précédentes, nous avons ſuppoſé l'intégrale $= o$ lorſque $z = o$. Si l'on vouloit que l'intégrale fût $= o$ lorſque $z =$ un angle quelconque a, & $x = b$; ſa valeur ne ſeroit pas plus difficile à trouver. Il y a cependant ici une remarque importante à faire; c'eſt que quand z eſt

$> 180°$. & < 360, alors $\sqrt{\frac{x}{a} - 1}$ doit être pris négativement; la raiſon de cela eſt que $\frac{2\sqrt{ax - aa}}{x}$ exprime en général le ſinus de z; & qu'ainſi $\sqrt{x - a}$ doit être pris négativement lorſque z eſt $> 180°$. & $< 360°$, ou en général lorſque ſin. z eſt négatif.

27. Pour n'être point embarraſſé par cette petite difficulté, il n'y aura qu'à mettre au lieu de $\sqrt{\frac{x}{a} - 1}$ (dans les intégrales qui contiennent cette quantité radicale) ſa valeur $\frac{x \text{ ſin. } z}{2a}$, avant que de completter l'intégrale. Par exemple, ſoit démandée l'intégrale de $\int \frac{dz}{1 + \text{cof. } z}$, en ſuppoſant cette intégrale $= 0$ lorſque $z = 270°$. On aura (n°. 9. ci-deſſus) l'intégrale cherchée $\int \frac{dz}{1 + \text{cof. } z} = \sqrt{\frac{x}{a} - 1}$ ſans être complettée; & mettant pour $\sqrt{\frac{x}{a} - 1}$ ſa valeur $\frac{x \text{ ſin. } z}{2a}$, l'intégrale completteſera $\frac{x \text{ ſin. } z}{2a} - \frac{2a \text{ ſin. } 270°}{2a} = \frac{x \text{ ſin. } z}{2a} + 1$. Ou bien on peut, ſi l'on veut, changer le ſigne du radical $\sqrt{\frac{x}{a} - 1}$, ce qui donnera $-\sqrt{\frac{x}{a} - 1}$, & l'intégrale complette $-\sqrt{\frac{x}{a} - 1} + 1$.

28. En faiſant cette attention, on évitera les erreurs de calcul où pourroit entraîner le ſigne équivoque du

radical $\sqrt{\frac{x}{a}-1}$. A l'égard des quantités où ce radical ne se rencontre pas, elles ne feront aucune difficulté. Telles sont celles des n°. 5, 7, 8, &c. où il n'y a que des puissances de x en nombres entiers.

XXXIV.

1. Soit l'ellipse $N'\Gamma N$ (*fig.* 16.) dont C soit le foyer; & dans laquelle on connoisse le rayon $C\Gamma$, & de plus la vitesse en Γ, & l'angle $C\Gamma O$; ces trois quantités se connoîtront par les formules du §. XXV. n°. 1, 9 & 11; en supposant qu'on sache la position de la ligne des apsides de cette ellipse, la valeur de son grand axe, la distance périhélie; enfin l'angle entre le rayon $C\Gamma$ & la ligne du périhélie.

2. Imaginons de plus que le plan de cette ellipse soit incliné d'une quantité connue à un autre plan $N'\gamma N$; & qu'on connoisse l'argument ΓCN de la latitude.

3. Supposant tirée la tangente ΓO, il est clair que les angles $C\Gamma O$, ΓCN, & le côté $C\Gamma$ feront connoître ΓO, & CO.

4. On aura $C\gamma^2 = C\Gamma^2 \cos.\Gamma CO^2 + C\Gamma^2 \sin.\Gamma CO^2 \times (\cos.\text{incl.})^2$; ce qui donnera $C\gamma$.

5. L'angle γCO aura pour sinus $\frac{C\Gamma \sin.\Gamma CO}{C\gamma}$ $\times$ cos. incl. Et la ligne $\Gamma\gamma = C\Gamma \sin.\Gamma CO \times \sin.$ incl.

6. Donc puisque CO est déjà calculée, on tirera des quantités connues CO, $C\gamma$, & γCO, l'angle $C\gamma O$, c'est-à-dire, la direction du point γ; & la ligne γO.

7. La viteſſe en γ ſera à la viteſſe en Γ, comme la ligne calculée γQ à la ligne auſſi calculée ΓO.

8. Donc ſi l'orbite $N' \Gamma N$ d'une Planète dont C eſt le foyer, eſt ſuppoſée rapportée ſur un plan quelconque, on pourra connoître à chaque inſtant le rayon vecteur $C\gamma$ de la projection, ainſi que la viteſſe & la direction du point γ, qui repréſente la projection de la Planète ſur le plan $N' \gamma N$.

9. Cette opération eſt abſolument néceſſaire pour déterminer les rayons vecteurs de l'orbite de la Planète perturbatrice, rapportée ſur l'orbite de la Comète; & pour connoître auſſi, lorſqu'il eſt néceſſaire, la viteſſe de la Planète ainſi projettée, & ſa direction.

XXXV.

Il nous reſte encore un Problême à réſoudre avant que de paſſer à l'application de notre théorie au mouvement d'une Comète particuliere. C'eſt d'indiquer la maniere dont on doit s'y prendre pour quarrer les courbes méchaniques dont il faudra trouver l'aire.

1. L'abſciſſe de ces courbes étant z, ſuppoſons que l'ordonnée ſoit $\lambda \times \nu \times \mu$ &c. λ, ν, & μ étant des quantités qu'on connoît pour chaque valeur de z de degré en degré. On trouvera d'abord la valeur de $\lambda \times \mu \times \nu$, en ajoutant enſemble les Logarithmes de λ, μ, ν, ſans égard au ſigne de ces quantités; enſuite on mettra à la quantité trouvée $\lambda \times \mu \times \nu$, le ſigne convenable, c'eſt-à-dire, celui qui réſulte de la combinaiſon des ſignes de λ, de μ, & de ν.

2. On fera $d\zeta = 1$ degré ou 2 degrés, ſelon qu'on en aura beſoin; & on exprimera $d\zeta$ en parties du rayon, ſavoir $d\zeta = \frac{100000 \times 1^\circ}{57^\circ\ 17'\ 4''}$.

3. On ajoutera enſemble toutes les ordonnées $\lambda \times \mu \times \nu$ avec leurs ſignes, à l'exception des deux extrêmes dont on ne prendra que la moitié; & on multipliera cette ſomme par la valeur de $d\zeta$.

4. Si on craint que cette approximation ne ſoit pas aſſez exacte, parce qu'on n'y conſidere la courbe que comme un polygone, & l'aire cherchée que comme une ſuite de trapêſes; en ce cas on ſe ſervira des formules que M. Cottes a données à la fin de ſon *Harmonia Menſurarum*. Suivant ces formules, ſi on prend trois ordonnées de ſuite, à égale diſtance, & que A ſoit la ſomme de la premiere & de la troiſiéme, B la ſeconde, & R la diſtance entre les deux ordonnées extrêmes, c'eſt-à-dire, entre la premiere & la troiſiéme; on aura pour l'aire compriſe entre les trois ordonnées, $\frac{A + 4B}{6} R$, ou (prenant $\rho = \frac{R}{2}$ pour la diſtance entre deux ordonnées voiſines) $\frac{A + 4B}{3} \rho = \frac{A + 4B}{3} d\zeta$.

5. Dans les endroits où on craindra que cette approximation ne ſoit pas encore aſſez éxacte, on prendra les ordonnées de demi degré en demi degré, ou de 10 minutes en 10 minutes; & on fera le même calcul.

Ou bien on pourra ſe ſervir des formules qui ſe trouvent

vent à la fin de l'Ouvrage de M. Cottes, & qui donnent la valeur approchée de l'aire d'une courbe, dont on connoît tant d'ordonnées qu'on voudra.

6. Par-là on aura, auſſi éxactement qu'on le pourra deſirer, les différentes parties de l'aire d'une courbe méchanique propoſée quelconque, lorſqu'on connoît à-peu-près la valeur numérique & le ſigne de chaque ordonnée, répondante à chaque abſciſſe z de degré en degré.

7. Si cette méthode de procéder par les quadratures paroiſſoit encore trop longue, parce qu'elle demande qu'on calcule un grand nombre d'ordonnées; on pourroit l'abréger en ſe ſervant, comme le pratiquent les Géometres dans des cas ſemblables, de la méthode des courbes paraboliques, imaginée par M. Newton, & perfectionnée depuis par MM. Cottes, Stirling & d'autres Auteurs. Mais au lieu d'employer ici, comme l'ont fait d'autres Géometres, les arcs z & leurs puiſſances, pour en former l'ordonnée de la courbe parabolique; il eſt, ce me ſemble, plus naturel & plus ſimple d'employer les ſinus & les cof. de z; 1°. plus naturel, parce que les forces perturbatrices dépendent de ſinus & de coſinus d'angles, & non pas d'angles mêmes, & qu'ainſi il eſt plus convenable de faire entrer des coſinus ou des ſinus que des arcs, dans l'expreſſion de la quantité qui doit ſervir à repréſenter ces forces; 2°. plus ſimple, parce que les intégrations ſeront plus faciles en employant les ſin. z & cof. z, que les arcs z. C'eſt pour-

quoi on prendra pour l'ordonnée de la courbe de genre parabolique $A + B \sin. z + C \sin. z \cos. z + D \sin. z \cos. z^2 +$ &c. Et multipliant cette quantité par dz, on aura l'intégrale, à laquelle on appliquera enſuite la méthode des courbes paraboliques.

8. Au lieu d'employer la formule $A + B \sin. z + C \sin. z \cos. z + D \sin. z \cos. z^2$ &c. on pourra encore employer celle-ci, qui ſera même plus commode pour le calcul, $B \sin. z + C \cos. z + D \sin. 2z + E \cos. 2z +$ &c.

9. Si l'on vouloit néanmoins faire entrer les arcs de cercle z dans la courbe parabolique au lieu des ſinus & des coſinus, on le pourroit abſolument. Mais voici deux moyens de rendre alors le calcul plus éxact. 1°. Au lieu de faire commencer les z au commencement A de la premiere révolution, on les fera commencer au point où l'on commence à employer la courbe parabolique; de maniere que ſi dans ce point $z = A'$, on prendra les ordonnées de la courbe $= A + B(z - A') + C(z - A')^2 + D(z - A')^3$ &c. 2°. Au lieu de repréſenter les ordonnées par des puiſſances de $z - A'$, on pourra les repréſenter par des puiſſances de $e^{z - A'}$, en cette ſorte, $Ae^{z - A'} + Be^{(2z - 2A')} + De^{(3z - 3A')}$ &c. ce qui ſera encore plus commode pour le calcul, parce que $e^{nz - nA'}$ eſt en général le nombre dont le Logarithme eſt $nz - nA'$, & que l'on a des tables toutes faites de ces nombres.

10. Les Géometres n'avoient juſqu'à préſent imaginé

rien de plus ſimple pour la quadrature des courbes irrégulieres, que les courbes de genre parabolique. Il me ſemble que les courbes dont je viens de parler, & qu'on peut appeller *courbes de genre expouentiel*, ſeroient du moins auſſi commodes, & peut-être même plus exactes dans certaines occaſions.

11. Voilà tous les préliminaires néceſſaires pour calculer dans les différens cas poſſibles les perturbations cauſées à l'orbite des Comètes par l'action des Planètes. Nous allons maintenant appliquer ces différentes opérations au calcul d'une Comète particuliere. Celle de 1682 ayant déja été calculée par M. Clairaut, ſuivant une méthode différente de la nôtre, nous en choiſirons une autre, à laquelle nous appliquerons notre méthode, en preſcrivant pied à pied aux calculateurs tout ce qu'il faut faire pour arriver à ce but.

XXXVI.

1. Nous prendrons pour exemple la Comète de 1532, qui paroît être la même que celle de 1661, & dont la période eſt d'environ 129 ans. La diſtance périhélie de cette Comète en 1532 ayant été de 50910 parties, dont le rayon du grand orbe en contient 100000, & en 1661 ayant été de 44891, il eſt clair que cette Comète eſt du nombre de celles dont la diſtance périhélie differe peu de la moitié du rayon du grand orbe, ou même eſt moindre; & qu'ainſi on peut y appliquer les abrégés de calcul relatifs à cette hypothèſe. De plus l'inclinaiſon de

cette Comète au plan de l'Ecliptique n'étant que de 32 degrés, ſa diſtance périhélie ſera environ 8 à 9 fois moindre que la diſtance moyenne de Jupiter; ainſi on peut encore y appliquer les abrégés de calcul dont on a donné la méthode aux §. XXII, XXIII, & ſuivans.

2. Voici donc maintenant la ſuite des opérations qu'il faut faire pour connoître les altérations de cette Comète en vertu de l'action de Jupiter & de Saturne, ou, ce qui eſt la même choſe, la différence de deux révolutions ſucceſſives.

3. On cherchera dans les tables des Comètes la diſtance périhélie a en 1532, qui ſera exprimée en parties, dont le rayon de la terre en contient 100000; & l'on aura

$$a = 0,50910$$

4. Comme les obſervations de 1532 ſont peu éxactes, & qu'en 1661, on a eu $a = 44851$, on pourroit ſuppoſer

$$a = 0,45000.$$

5. On cherchera le tems du paſſage de la Comète de 1532 au périhélie, qu'on trouvera le 19 Octobre à 22^h & celui de la Comète de 1661, qu'on trouvera le 26 Janvier N. S. à 23^h.

Ce qui fait pour la révolution totale

$$m = 129^{ans}\ 89^{jours}\ (a).$$

6. On fera enſuite: comme l'année commune de $365^j.5^h.49'$ élevée à la puiſſance $\frac{2}{3}$ eſt à $m^{\frac{2}{3}}$; ainſi 100000

(a) Ce devroit être 129 ans 99 jours; mais il faut en ôter les 10 jours retranchés en 1582 dans le Calendrier Grégorien.

eſt à un quatriéme terme, qui ſera le demi-grand axe de l'orbite de la Comète; on nommera ce demi-grand axe . . . . . ♂

7. Cela fait, on aura aiſément les quantités ſuivantes,

$\frac{♂ - a}{♂} = 6.$

$\frac{♂}{♂ - a} = p.$

$2a♂ - aa = n.$

$2a - \frac{aa}{♂} =$ au parametre $p.$

$\frac{2a♂ - aa}{♂ - a} = a + ap = \theta.$

8. Depuis le périhélie A juſqu'à 90 degrés de longitude, on calculera les rayons de l'orbite par la formule très-ſimple $x = \frac{2a}{1 + \text{cof. } z}$; ou plutôt on ſe diſpenſera de calculer ces rayons, & on ſe ſouviendra ſeulement qu'on peut leur ſuppoſer cette valeur.

9. Et on calculera les tems correſpondans par la formule $t = \frac{m}{♂^{\frac{1}{2}} \times 6,283185} \times a^{\frac{1}{2}} \times \left[\frac{\sqrt{2}}{3} \times \left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}\right]$. On n'aura même beſoin de cette formule, comme on le verra plus bas, que pour calculer le ſeul tems t qui répond à $z = 90°$. ou $x = 2a$; ce qui donne $t = \frac{m \cdot a^{\frac{1}{2}}}{♂^{\frac{1}{2}} \cdot 6,283185} \times \left[\frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2}\right]$.

10. Depuis 90 degrés on calculera les rayons x par la formule,

$$x = \frac{\theta}{\varepsilon + \text{cos. } z}.$$

Les angles α par leurs cosinus $\frac{\delta - x}{\delta - a}$.

Et on aura les tems correspondans par la formule $t = \frac{m}{360^\circ}(\alpha - 6 \text{ sin. } \alpha)$.

11. On ne poussera ce calcul des x & des t que jusqu'au point où $x = 20$ fois le rayon du grand orbe $= 2000000$; ce qui donne, en nommant α' l'angle ASE (*fig.* 13.), cos. $\alpha' = \frac{-2000000 + \delta}{\delta - a}$.

Et par conséquent l'angle ASE.

12. On interrompra ce calcul depuis le point E, où $SE = 2000000$, jusqu'au point e correspondant, où $Se = SE$ (*fig.* 13.); parce que dans cet espace il n'est pas nécessaire de connoître les tems t; le calcul de ces tems n'étant nécessaire que pour avoir au moins à-peu-près les positions correspondantes de Jupiter & de Saturne, dont on n'a pas besoin dans la partie EDe de l'orbite.

13. Depuis le point e jusqu'à 90 degrés en-deçà du périhélie, on recommencera les calculs des t en cette maniere.

14. On remarquera d'abord qu'aux points E, e, on a cos. $z = \mp \frac{\theta}{2000000} - \rho$; ce qui donne deux valeurs de z, à compter depuis le périhélie A; l'une qui répond au point E, & qui est plus petite que 180 degrés, l'autre

qui répond au point e, & qui eſt plus grande que 180°.

15. Depuis cette derniere valeur de z juſqu'à celle de $z = 270°$. on calculera les rayons x par la formule

$$x = \frac{\theta}{\gamma + \text{cof. } z};$$

Et les tems t par la formule $t = \frac{m}{360°}(a - \text{Sin. } a)$, en faiſant attention que

$$\text{Cof. } a = \frac{\delta - x}{\delta - a},$$

Et que a doit être pris ici plus grand que 180 degrés, & par conſéquent que ſin. a eſt négatif.

16. Depuis $z = 270°$. juſqu'à $z = 360°$, les rayons x ſeront exprimés par la formule

$x = \frac{2a}{1 + \text{cof. } z}$, qu'on ſe diſpenſera de calculer, comme dans le n°. 8. ci-deſſus.

17. Et les tems t par la formule

$$t = m - \frac{m}{\delta^{\frac{1}{2}} \cdot 6,283185} \times a^{\frac{1}{2}} \times \left[\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{x}{a} - 1\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{a}{a} - 1 \cdot \sqrt{2}\right],$$

formule dont on pourra même ſe diſpenſer; car on n'aura beſoin de connoître que le ſeul tems t qui répond à $z = 360°$, lequel eſt déja tout calculé, & $= m$.

18. Pour la ſeconde révolution depuis A juſqu'en E, les x ſeront les mêmes que dans la partie correſpondante de la premiere révolution; & les tems t devront ſeulement être augmentés de la quantité m.

19. On formera par ce moyen, depuis le point de 90° de la ſeconde révolution juſqu'au point E de la même révolution, une table des x & des t correſpondans; & on aura l'attention de ne calculer ni les x ni les t pour la partie EDe, les points E, e étant ſuppoſés ceux où $x = 2000000$.

20. Cette premiere opération faite, on calculera par les régles de la Trigonométrie, l'inclinaiſon des orbites de Jupiter & de Saturne à l'orbite de la Comète; & de plus les lieux de Jupiter & de Saturne correſpondans aux tems t. On rapportera ces lieux ſur l'orbite de la Comète, ce qui donnera

Les diſtances accourcies ξ de chacune des deux Planètes, correſpondantes aux x & aux t.

Les angles ζ entre les lieux de la Comète & ceux des Planètes perturbatrices, rapportés à l'orbite de la Comète. Ces angles ζ ſe compteront toujours depuis la Planète juſqu'à la Comète, & dans le ſens où la Comète ſe meut.

21. Dans ce calcul il ne faudra chercher les poſitions de Jupiter & de Saturne que depuis le tems où la Comète eſt à 90 degrés du périhélie A juſqu'au point E, & depuis le point e juſqu'à 270 degrés du périhélie. Pour tout le reſte de l'orbite, ſavoir pour la partie KAk (*fig.* 17.) qui s'étend à 90 degrés de part & d'autre du périhélie, voici ce que l'on fera.

22. On calculera la poſition J de Jupiter à l'inſtant du périhélie A, & ſa poſition i à l'inſtant où la Comète eſt

eſt en K; & on ſuppoſera que pendant tout le tems que la Comète parcourt AK, Jupiter eſt immobile au point de milieu i' de cet eſpace.

23. On fera la même choſe pour l'eſpace kA de la premiere révolution, ainſi que pour l'eſpace AK de la ſeconde.

24. On fera le même calcul pour Saturne.

25. Cela poſé, ſoit l'angle conſtant & connu $i'SA = A$ (*fig.* 17.); on aura depuis A juſqu'en K, en nommant ξ la diſtance accourcie & conſtante Si', & ξ' la diſtance réelle correſpondante de la Planète au Soleil, (§. XXI, XXII & XXIII),

$$X = -\frac{3J.4a^4}{S.\xi'^5(1+\cos.z)^3} + \frac{3J.\xi^2\cos.2A.4a^4\cos.z^2}{S.\xi'^5(1+\cos.z)^3}$$

$$-\frac{3J.\xi^2.4a^4\sin.2A\cos.z\sin.z}{S\xi'^5(1+\cos.z)^4} + \frac{3J.\xi^2.4a^4(1-\cos.2A)}{2S.\xi'^5(1+\cos.z)^3}$$

$$-\frac{3J.\xi^2}{S.\xi'^5}\times\frac{\sin.2A}{2}\times\frac{4a^4\sin.z}{(1+\cos.z)^4} + \frac{3J.\xi^2\sin.2A}{S.\xi'^5}$$

$$\times\frac{4a^4\sin.z\cos.z^2}{(1+\cos.z)^4} + \frac{3J.\xi^2\cos.2A}{S.\xi'^5}\times\frac{4a^4\sin.z^2\cos.z}{(1+\cos.z)^4};$$

$$\text{Et } Y = \frac{3J.\xi^2\sin.2A}{S.\xi'^5}\times\frac{4a^3}{(1+\cos.z)^4}$$

$$-\frac{3J.\xi^2\sin.2A}{S.\xi'^5}\times\frac{8a^3\cos.z^2}{(1+\cos.z)^4} - \frac{3J.\xi^2\cos.2A}{S.\xi'^5}$$

$$\times\frac{8a^3\sin.z\cos.z}{(1+\cos.z)^4}.$$

26. De-là, & des formules du §. XXXIII, on tirera aiſément la valeur de $\int X dz \sin.z$, lorſque $z = 90°$, comme auſſi celle de $\int X dz \cos.z$, celle de $\int Y dz$, celle de $\int Y dz(1-\cos.z)$, & celle de $\int Y dz \sin.z$.

Soit donc lorsque $z = 90°$,

$\int X dz \text{ sin. } z = A'$.

$\int X dz \text{ cos. } z = B'$.

$\int Y dz = C'$.

$\int Y dz (1 - \text{cos. } z) = D'$.

$\int Y dz \text{ sin. } z = E'$;

Et on mettra à part ces quantités pour en faire usage en tems & lieu.

27. De plus on fera depuis A jusqu'en K,

$$P' = \frac{\frac{x}{a} - 1}{6} + \frac{\frac{x}{a} - 1}{10} = P'.$$

$$\frac{x^2}{3aa} - \frac{1}{6} = Q'.$$

$$R' = \frac{\frac{x}{a} - 1}{6} + \frac{\frac{x}{a} - 1}{10} = R'.$$

$$V' = \frac{\frac{x}{a} - 1}{6} - \frac{\frac{x}{a} - 1}{7} = V'.$$

28. Par ces valeurs de P', Q', R', V', & par les valeurs de X & de Y trouvées ci-dessus, on calculera la valeur algébrique des aires $\int X P' dz \text{ sin. } z$, $\int X Q' dz \text{ cos. } z$, $\int R' Y dz$, $\int Y P' dz (1 - \text{cos. } z)$, $\int Y Q' dz \text{ sin. } z$, $\int Y V' dz$, en supposant ces aires $= 0$, lorsque $z = 0$. Ces aires se trouveront toujours, ou par des intégrales éxactes, ou par des arcs de cercle, ou par des Logarith-

mes; il faudra avoir recours pour cela aux formules du §. XXXIII, en substituant, selon qu'il paroîtra plus commode, dans les différentielles à intégrer, ou $\frac{2a}{1+\text{cos. }z}$ au lieu de x, ou $\frac{2a}{x} - 1$ au lieu de cos. z.

29. Ensuite on supposera que lorsque $z = 90°$, on ait

$\int XP'dz \text{ sin. } z = F'$

$\int XQ'dz \text{ cos. } z = G'$

$\int R'Ydz = H'$

$\int YP'dz\,(1 - \text{cos. } z) = K'$

$\int YQ'dz \text{ sin. } z = L'$

$\int YV'dz = M'$,

Et on mettra à part chacune de ces quantités, pour en faire usage en tems & lieu.

30. On se souviendra que pour Jupiter $\frac{J}{S} = \frac{1}{1067}$, & pour Saturne $\frac{J}{S} = \frac{1}{3021}$; & on fera le calcul de toutes les quantités susdites pour l'action de chacune des deux Planètes séparément; mais pour abréger ce calcul le plus qu'il sera possible, on aura soin; 1°. de mettre à part les fractions $\frac{J}{S}$ qui doivent multiplier tous les termes dans chacun de ces calculs.

2°. Quand on aura trouvé l'expression algébrique en x de chacune de ces quantités, de faire dans chacune $x = 2a$, pour avoir les valeurs arithmétiques répondantes à $z = 90°$.

3°. De mettre à part les valeurs des constantes, comme $\frac{-4a^4}{\xi^3}$, $\frac{3\xi^2 \cos. 2A}{\xi^{15}}$, $\frac{3\xi^2 \sin. 2A}{\xi^{15}}$ &c. qui multiplient chacune de ces quantités, afin de ne pas les calculer deux fois.

31. Depuis le point K où $\zeta = 90°$. jusqu'au point C où $SC =$ la distance moyenne de Jupiter, il faut faire un autre calcul.

Soit Δ cette distance moyenne, & on aura l'angle ASC que j'appelle ω, par l'équation suivante;

$$\text{Cos. } \omega = \frac{1}{\Delta} - r.$$

32. Ainsi depuis le point où $\zeta = 90°$, jusqu'à celui où $\zeta = \omega$, on calculera d'abord,

Les positions de la Planète pour chaque tems t; ce qui donnera les ξ & les ζ, c'est-à-dire, les distances de la Planète au Soleil, rapportées sur l'orbite de la Comète, & les distances des lieux de la Planète à ceux de la Comète, aussi rapportées sur l'orbite de la Comète; ces distances ou élongations se compteront toujours de la Planète à la Comète, en suivant le sens selon lequel la Comète se meut.

On aura aussi les distances réelles de la Planète au Soleil; qu'on nommera ξ'.

33. Enfin on connoîtra les distances réelles de la Planète à la Comète, que l'on nommera k.

On cherchera ensuite de degré en degré les quantités

$$X' = -\frac{J.x^2 a^2 \xi \cos. \zeta}{S.p.\xi^{13}} - \frac{I.x^3 a^2}{S.p.k^3} + \frac{Jx' a^2 \xi \cos. \zeta}{S.p.k^3}$$

$$-\frac{J\xi \text{ sin. } \zeta}{S.\xi'^3}\times\frac{x^3\,aa \text{ sin. } z}{p.\theta}+\frac{J\xi \text{ sin. } \zeta}{S.k^3}\times\frac{x^3\,aa \text{ sin. } z}{p.\theta};$$

$$\text{Et } Y'=\frac{J\xi \text{ sin. } \zeta.x^3}{S.\xi'^3.p}-\frac{J.\xi \text{ sin. } \zeta.x^3}{S.k^3\,p}.$$

34. Dans ce calcul on aura encore ſoin, comme dans les précédens; 1°. de mettre à part la quantité $\frac{J}{S}$ pour chaque Planète perturbatrice, ou les fractions $\frac{1}{1067'}$ & $\frac{1}{3021}$; 2°. de mettre auſſi à part les quantités conſtantes $\frac{a^2}{p}$, & $\frac{a^2}{p.\theta}$, ou leurs Logarithmes, afin de ne pas les calculer pluſieurs fois; & de ne les multiplier par les variables, ou plutôt de ne leur donner leur valeur arithmétique, qu'à la fin de l'opération dont on parlera dans les n°. 35 & 36. qui ſuivent.

35. Ces précautions priſes, on cherchera par les quadratures, ſuivant les méthodes connues des Géometres, & expliquées ci-deſſus §. XXXV, les valeurs de $\int X'\,dz$ ſin. z depuis le point où $z=90°$. juſqu'à celui où $z=\omega$. On cherchera de même les valeurs de $\int X'\,dz$ cof. z, de $\int Y'\,dz$, de $\int Y'\,dz$ (1 — cof. z), & de $\int Y'\,dz$ ſin. z; on obſervera que ces valeurs ſoient $=a$ lorſque $z=90°$.

36. Soit donc lorſque $z=\omega$,

$\int X'\,dz$ ſin. $z=A''$.

$\int X'\,dz$ cof. $z=B''$.

$\int Y'\,dz=C''$.

$\int Y' dz (1 - \text{cos.}\, z) = D''.$

$\int Y' dz \,\text{sin.}\, z = E''.$

37. On prendra enſuite les angles α, déja calculés n°. 10. & qui ſont tels que

$$\text{Cos.}\, \alpha = \frac{\delta - x}{\delta - \rho},$$

Et on fera depuis K juſqu'en C,

$$P'' = -\frac{\sqrt{\delta - a}^{2}.\delta}{(2a\delta - aa)^{\frac{3}{2}}}\alpha + \frac{\sqrt{\delta - a}^{3}.\,\text{sin.}\,\alpha}{(2a\delta - aa)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\delta^{2}.\sqrt{\delta - a}^{3}}{(2a\delta - aa)^{\frac{5}{2}}} \times$$

$$\text{sin.}\,\alpha + \frac{\delta.\sqrt{\delta - a}^{4}}{4(2a\delta - aa)^{\frac{5}{2}}}\,\text{sin.}\,2\alpha + \frac{(3\delta\delta - 2a\delta + aa)(\delta - a)^{2}\delta\alpha}{2(2a\delta - aa)^{\frac{7}{2}}};$$

$$Q'' = -\frac{\sqrt{\delta - a}^{2}}{2(2\delta - a)^{2}} + \frac{\sqrt{\delta - a}^{2}.x^{2}}{2.(2a\delta - aa)^{2}};$$

$$R'' = -\frac{\delta.\sqrt{\delta - a}^{2}}{(2a\delta - aa)^{\frac{3}{2}}}\alpha + \frac{\delta.\sqrt{\delta - a}^{3}\,\text{sin.}\,\alpha}{(2a\delta - aa)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{2\delta - a}{\delta - a}\left(-\frac{2\delta.\sqrt{\delta - a}^{4}}{(2a\delta - aa)^{\frac{7}{2}}}\,\text{sin.}\,\alpha + \right.$$

$$\left.\frac{\sqrt{\delta - a}^{5}\,\text{sin.}\,2\alpha}{4.(2a\delta - aa)^{\frac{5}{2}}} + \frac{\sqrt{3\delta\delta - 2a\delta - aa}.\sqrt{\delta - a}^{3}}{2.(2a\delta - aa)^{\frac{5}{2}}}\alpha\right).$$

$$\text{Enfin } V'' = -\frac{\delta.\sqrt{\delta - a}^{2}}{(2a\delta - aa)^{\frac{3}{2}}}\alpha + \frac{\sqrt{\delta - a}^{3}\,\text{sin.}\,\alpha}{(2a\delta - aa)^{\frac{3}{2}}};$$

38. Par ces valeurs de P'', Q'', R'', V'', & par les valeurs trouvées n°. 33 pour X' & pour Y', on cherchera, ſuivant les méthodes expliquées §. XXXV, les quadra-

tures des aires $\int P'' X' dz \sin. z$, $\int Q'' X' dz \cos. z$, $\int R'' Y' dz$, $\int Y' P'' (1 - \cos. z) dz$, $\int Y' Q'' dz \sin. z$, $\int Y' V'' dz$, en supposant ces aires $= o$ lorsque $z = 90°$. Et dans ce calcul on usera des mêmes attentions que dans le n°. 34, pour le rendre le moins long que faire se pourra.

39. On fera ensuite lorsque $z = \omega$,

$\int X' P'' dz \sin. z = F''$.

$\int X' Q'' dz \cos. z = G''$.

$\int R'' Y dz = H''$.

$\int Y' P'' (1 - \cos. z) dz = K''$.

$\int Y' Q'' dz \sin. z = L''$.

$\int Y' V'' dz = M''$.

Et on mettra ces quantités chacune à part.

40. Depuis le point C où $x = \Delta$, jusqu'au point E où $x = 2000000$, il faut faire un autre calcul.

On commencera par chercher l'angle ω' ou ASE, tel que l'on ait

$$\text{Cos. } \omega' = \frac{0}{2000000} - f.$$

Et depuis $z = \omega$ (trouvé ci-dessus n°. 31.) jusqu'à $z = \omega'$, on prendra (§. XVI, XVII & XVIII).

$$\varphi = -\frac{2J.\xi \cos. \zeta}{x^3} + \frac{J.x - \xi \cos. \zeta}{k^3},$$

$$\pi = +\frac{J.\xi \sin. \zeta}{x^3} - \frac{J.\xi \sin. \zeta}{k^3},$$

ou plutôt

$$X'' = +\frac{2J.a^2 \xi \cos. \zeta}{S.gx} - \frac{Jx^3.a^2}{S.gk^3} + \frac{Jx^2 a^2 \xi \cos. \zeta}{S.gk^3}$$

$$-\frac{J\xi \text{ sin. } \zeta}{S} \times \frac{a\,a \text{ sin. } z}{p.\theta} + \frac{J\xi \text{ sin. } \zeta . x^3\, a\,a \text{ sin. } z}{S p \theta k^3}.$$

$$\text{Et } Y'' = \frac{J.\xi \text{ sin. } \zeta}{S\,p} - \frac{J\xi \text{ sin. } \zeta . x^3}{S.\,p\,k^3}.$$

41. De-là on tirera par les quadratures les valeurs de $\int X'' d\zeta$ sin. ζ, $\int X'' d\zeta$ cos. ζ, $\int Y'' d\zeta$, $\int Y'' dz$ $(1 - \text{cos. } \zeta)$, $\int Y'' d\zeta$ sin. ζ, depuis le point C jusqu'au point E, c'est-à-dire, depuis $\zeta = \omega$ jusqu'à $\zeta = \omega'$; ayant soin par conséquent que ces aires soient $= o$ lorsque $\zeta = \omega$.

42. Soit donc lorsque $\zeta = \omega'$,

$\int X'' dz$ sin. $\zeta = A'''$.

$\int X'' dz$ cos. $\zeta = B'''$.

$\int Y'' dz = C'''$.

$\int Y'' dz\,(1 - \text{cos. } z) = D'''$.

$\int Y'' dz$ sin. $z = E'''$. On mettra à part ces quantités.

43. On prendra ensuite les angles α déja calculés n°. 10, & qui sont tels que

$$\text{Cos. } \alpha = \frac{\delta - x}{\delta - a},$$

Et on cherchera depuis C jusqu'en E, c'est-à-dire, depuis $z = \omega$, jusqu'à $z = \omega'$, les valeurs correspondantes de P, Q'', R'', V'', qui seront exprimées par les mêmes formules que dans le n°. 37. Continuant ensuite l'opération comme dans l'art. 38, on cherchera les aires $\int X'' P'' dz$ sin. z, &c. enforte qu'elles soient $= o$ lorsque $z = \omega$.

44. On fera ensuite lorsque $z = \omega'$,

$\int X'' P'' dz$ sin. $z = F'''$.

$\int X'' Q'' dz$ cos. $z = G'''$.

$\int R'' Y'' dz = H'''$.

$\int R'' Y'' dz = H'''$.

$\int Y'' P'' (1 - \text{cos. } z)\, dz = K'''$.

$\int Y'' Q'' dz \text{ sin. } z = L'''$.

$\int Y'' V'' dz = M''$.

Et on mettra ces quantités à part.

45. Depuis le point E, où $x = 2000000$, jusqu'au point correspondant, c'est-à-dire, depuis $z = \omega'$ jusqu'à $z = 360 - \omega'$, il faut faire un nouveau calcul.

On prendra

$\varphi = + \frac{J}{x^2}$;

$\pi = o$,

ou plutôt

$X^{IV} = - \frac{J a a}{S . p}$;

$Y^{IV} = o$,

& on calculera l'aire $\int - \frac{J a a}{S . p} dz \text{ sin. } z = \frac{- J a a}{S . p}$ (cos. ω' — cos. $360 - \omega'$) $= o$, que j'appelle A^{IV};

Et l'aire $\int - \frac{J a a}{S . p} dz \text{ cos. } z = + \frac{J a a}{S . p}$ (2 sin. ω'), que j'appelle B^{IV}.

46. Dans la valeur générale de P'' trouvée n° 37, on prendra la valeur qui répond à $z = 360 - \omega'$, & on l'appellera P^{IV}; de même on prendra dans la valeur générale de Q, celle qui répond à $z = 360 - \omega'$, & on la nommera Q^{IV}.

On fera ensuite (§. XIX. n°. 14.) $+ \frac{J a a P^{IV}}{S . p}$ (cos. ω' — cos. $360 - \omega'$) $= - A^{IV} P^{IV} = o$;

& $-\frac{Jaa\,Q^{IV}}{S.p}$. 2 ſin. $\omega' = -Q^{IV}B^{IV}$, que j'appelle O'.

On cherchera (§. XXXIII.) l'aire $+\frac{Jaa}{p} \times \int \frac{dz\,(\text{cof.}\,\omega' - \text{cof.}\,z)\,\text{cof.}\,z}{(\varrho + \text{cof.}\,z)^3}$ en ſuppoſant cette aire $= o$ lorſque $z = \omega'$.

Et l'aire $+\frac{Jaa}{p} \times \int \frac{dz\,(\text{ſin.}\,\omega' - \text{ſin.}\,z)\,\text{ſin.}\,z}{(\varrho + \text{cof.}\,z)^3}$, en ſuppoſant de même cette aire $= o$ lorſque $z = \omega'$.

On ſuppoſera la premiere de ces aires $= T'$ lorſque $z = 360 - \omega'$, & la ſeconde $= Z'$ dans le même cas; & on mettra à part les quantités O', T', Z'.

47. Depuis le point e juſqu'au point c, on fera les mêmes opérations que depuis le point C juſqu'au point E; depuis le point c juſqu'au point k, les mêmes que depuis le point K juſqu'au point C; depuis le point k juſqu'au point A, on ſuppoſera la Planète perturbatrice en repos au milieu de l'eſpace qu'elle parcourt pendant ce tems-là; & du reſte on fera les mêmes opérations que depuis A juſqu'en K.

48. On ſe ſouviendra ſeulement que depuis k juſqu'en A, comme z eſt $> 180°$. & $< 360°$, il faudra dans les valeurs de P', R', V', qui ſeront alors de la même eſpéce que celles du n°. 27, avoir l'attention (§. XXXIII. n°. 27.) de prendre le radical négatif, & d'ajouter à l'intégrale une conſtante convenable en ſuppoſant $x = 2a$; ou, ce qui eſt encore plus commode, on ſuppoſera $\frac{x}{a} = 1 = \frac{x\,\text{ſin.}\,z}{2a}$; & au lieu de $\sqrt{\frac{x}{a} - 1}$, on

écrira $\frac{x \text{ fin. } \zeta}{2a}$ &c. A quoi on ajoutera ce que deviennent les valeurs de P'', Q'', R'', V'', trouvées n°. 37. lorsque $\zeta = 270°$. Soient ϖ'', q'', ρ'', ν'', ces dernieres valeurs, trouvées précédemment dans le calcul qu'on a fait pour la partie ek; & on aura depuis k jusqu'en A;

$$P'' = \varpi'' - \frac{x \text{ fin. } \zeta}{4 \cdot 2a} - \frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{x \text{ fin. } \zeta}{2a}\right)^2}{20} + \frac{1}{20},$$

$$Q'' = +q'' + \left(\frac{x^2}{8aa} - \frac{1}{8}\right).$$

$$R'' = \rho'' + \frac{\left(\frac{x \text{ fin. } \zeta}{2a}\right)^3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{\left(\frac{x \text{ fin. } \zeta}{2a}\right)^2}{10} + \frac{1}{10},$$

$$V'' = \nu'' - \frac{\left(\frac{x \text{ fin. } \zeta}{2a}\right)^3}{6} - \frac{1}{6} - \frac{x \text{ fin. } \zeta}{2 \cdot 2a} - \frac{1}{2}.$$

Et dans ces différentes valeurs on substituera au lieu de x sa valeur $\frac{2a}{1 + \text{cos. } \zeta}$, ou au lieu de fin. ζ sa valeur $-\frac{2\sqrt{ax - xx}}{a}$, selon qu'on le jugera plus commode. Au reste dans toutes les opérations qui se font depuis e jusqu'en A, on se souviendra de prendre les angles ζ & α, à compter depuis le commencement A de la révolution; & on nommera A^{V}, A^{VI}, A^{VII} les quantités qui répondent aux A''', A'', A', des trois premieres opérations; B^{V}, B^{VI}, B^{VII}, celles qui répondront aux B''', B'', B', &c. & ainsi de suite.

49. Pour la seconde révolution jusqu'au point e, on fera les mêmes opérations que pour la premiere, en

partant toujours du point A de la premiere révolution ; pour compter les z & les α, ainſi que les angles ω, ω' &c. qui ſeront alors de 360 degrés plus grands que dans la premiere révolution ; on aura par ce moyen de nouvelles quantités A^{VIII}, A^{IX}, A^{X}, A^{XI}, & B^{VIII}, B^{IX} &c. qui répondront aux A', A'', A''' &c. & B', B'', B''' &c. de la premiere révolution.

50. Cela fait, on ajoutera d'abord enſemble toutes les valeurs de A', A'', A''' &c. trouvées à chaque opération, & on nommera leur ſomme a'.

On aura de même les quantités b', c', d', e', f', g' &c. en ajoutant enſemble les valeurs de B', B'', B''' &c. & celles de C', C'' &c.

51. Enſuite on nommera p' ce que devient P'' (n°. 37.) lorſque $z = 360 + 360 - \omega'$.

q' ce que devient Q'' dans le même cas,

r' ce que devient R'' dans le même cas,

u' ce que devient V'' dans le même cas,

O'', T'', Z'', les quantités qui ſont analogues dans la ſeconde révolution aux quantités O', T', Z' de la premiere, déja calculées n°. 46 ; celles-ci commençoient à l'angle $z = +\omega'$, & finiſſoient à l'angle $z = 360 - \omega'$. Celles-là commenceront à l'angle $z = 360 + \omega'$, & finiront à l'angle $z = 2 \cdot 360 - \omega'$.

Cela fait, on calculera la quantité $\frac{2m \cdot \overline{2a\delta - aa}^{\frac{1}{2}}}{aa\delta \cdot 6,283185 \cdot \delta - a}^{\frac{3}{2}} \times \left[p' a' - \frac{2aap'd'}{P} + q' b' - \frac{2aaq'e'}{P} + \right.$

$$\frac{2aa'c'}{p} - f' - g' - \frac{2aah'}{p} + \frac{2aak'}{p} + \frac{2aal'}{p} + O' + T' + Z' + O'' + T'' + Z''] + \frac{m.(2a\delta - aa)^{\frac{1}{2}}}{\delta.6,283185.(\delta - a)^2}[u'c' - m'];$$

dans laquelle le coëfficient $\frac{2m.\sqrt{2a\delta - aa}^5}{aa\delta.6,283185.\sqrt{\delta - a}^3}$ repréſente $\frac{m\sqrt{S+C}}{\delta^{\frac{1}{2}}.6,283185} \times \frac{2}{a^3 g} \times \frac{\sqrt{2a\delta - aa}^3}{(\delta - a)^3}$, ou $\frac{2.\sqrt{2a\delta - aa}^3}{(\delta - a)^3 a^3 g} \times \frac{m\sqrt{S}}{\delta^{\frac{1}{2}}.6,283185}$; & le coëfficient $\frac{m.\sqrt{2a\delta - aa}^3}{\delta.6,283185.\sqrt{\delta - a}^2}$ repréſente $\frac{\sqrt{2a\delta - aa}^2}{(\delta - a)^3.ag} \times \frac{m\sqrt{S}}{\delta.6,283185.\sqrt{\delta - a}^2}$.

52. J'appelle, ſuivant le §. XX. n°. 4, cette quantité C; Et je nomme a la valeur de la même quantité, lorſque $\zeta = 360°$. Cette valeur de a ſera facile à trouver; car il n'y a qu'à, dans la formule précédente, prendre les valeurs de p', a', q', b', &c. lorſque $\zeta = 360°$.

Ces opérations finies, le plus long & le plus difficile eſt fait, il ne reſte plus que les ſuivantes.

53. On cherchera lorſque la Comète eſt en C, à la diſtance moyenne de Jupiter, la poſition $C\gamma$ (*fig.* 18.) & la viteſſe du Satellite γ. Pour cela on commencera par prendre $C\gamma = \frac{J.\xi}{S}$, ξ étant la diſtance accourcie de la

Planète au Soleil, calculée pour le moment qui répond au lieu C de la Comète.

54. On connoîtra pour ce même moment l'angle ζ, & par conſéquent la poſition de $C\gamma$, & l'on aura $S\gamma = SC - C\gamma \text{ cof. } \zeta = SC - \frac{J.\xi \text{ cof. } \zeta}{S}$; je mets —, parce que, ſuivant la conſtruction de la figure, ζ eſt ici plus grand que 90 degrés.

55. On connoîtra de plus, par le §. XXV. n°. 9, la poſition de la tangente en C, c'eſt-à-dire, la direction de la Comète en C, ou l'angle SCL; & par conſéquent menant γN parallèle à cette tangente, on aura l'angle $S\gamma N = SCL + CS\gamma = SCL + \frac{J.\xi \text{ fin. } \zeta}{S.SC}$.

56. On connoîtra encore par le §. XXV. n°. 11. la viteſſe g en C, laquelle ſera telle que $gg = S\left(\frac{p}{aa} + \frac{2}{\Delta} - \frac{2}{a}\right)$.

57. On connoîtra de même (§. XXXIV.) la viteſſe du Satellite en γ autour de C, & ſa direction; c'eſt-à-dire, l'angle $O\gamma C$, que cette direction fait avec $C\gamma$.

58. Donc puiſqu'on connoît l'angle de γC avec γN ou γn, on connoîtra l'angle $O\gamma N$, dont on nommera le coſinus r, & le ſinus ϖ; ainſi ſuppoſant la viteſſe ſuivant $\gamma O = \sqrt{S.n}$ (n eſt un nombre connu par le n°. 57.) on trouvera la direction du Satellite $\gamma N'$ en ajoutant à l'angle $S\gamma N$ l'angle $N'\gamma N = \frac{\varpi\sqrt{S.n}}{g}$; & ſa

viteſſe g', en retranchant de g la quantité $2\sqrt{S.n}$; ce qui donnera $g'g' = gg - 2g\sqrt{Sn} = S\left(\frac{p}{aa} + \frac{2}{\Delta} - \frac{2}{a} - 2\sqrt{n}.\sqrt{\frac{p}{aa} + \frac{2}{\Delta} - \frac{2}{a}}\right)$.

Il faut bien remarquer que ſi la ligne γO étoit autrement dirigée qu'on ne le ſuppoſe dans cette figure, on devroit alors ajouter dans certains cas, ce qu'on retranche ici, & retrancher ce qu'on ajoute. Un Calculateur tant ſoit peu exercé, verra facilement ce qu'il doit faire, ſuivant la poſition reſpective des lignes; les opérations que nous preſcrivons ici, ſont relatives à la figure que nous avons faite. Connoiſſant $S\gamma$ & la viteſſe abſolue en γ, on aura l'ellipſe $\gamma o \gamma'$ (*fig.* 14.) décrite par le Satellite γ autour du Soleil.

59. Pour trouver le rayon $S\gamma'$ qui doit terminer (§. XX. n°. 8.) la partie elliptique $\gamma O \gamma'$ (*fig.* 14.) de l'orbite du Satellite, on fera attention que l'on a par le n°. 6. du §. XX. la poſition & la grandeur de $S\lambda$, & la poſition de SC', qui eſt ſemblable à celle de SC; & que l'angle $C'S\gamma' = S\gamma'\lambda =$ à-très-peu-près $\frac{\text{ſin.}\lambda SC' \times S\lambda}{SC}$; d'où l'on tirera la poſition de $S\gamma'$.

60. Les points γ & γ' étant ainſi déterminés, on aura le tems par $\gamma O \gamma'$ par le §. XXVII. n°. 8; & on connoîtra de plus (§. XXVI. n°. 6.) la viteſſe g'' en γ'.

61. On repaſſera enſuite de l'ellipſe du Satellite à celle de la Comète, comme on a paſſé tout à-l'heure de l'orbite de la Comète à celle du Satellite; & dans cette

ſeconde opération on ſuivra éxactement le procédé indiqué au §. XX. n°. 8. 9.

62. On continuera de la ſorte à ſuivre les opérations indiquées dans le §. XX. n°. 10, 11, juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé au point Γ (*fig.* 15.) ou $S\Gamma$ = vingt fois le rayon du grand orbe, c'eſt-à-dire, ou $S\Gamma = 2000000$.

63. Là on connoîtra (§. XX. n°. 16.) la poſition $\Gamma C'''$ du Satellite; & ſa viteſſe autour de C''' (§. XXXIV).

64. Cette poſition & cette viteſſe connues, on continuera le calcul, ſuivant le procédé expliqué au §. XX. n°. 17, 18 & ſuivans; & on obſervera, en finiſſant la ſeconde révolution, de calculer les perturbations dans la partie *e c* (*fig.* 17.), comme on l'a fait dans la partie CE; dans la partie $c\,k$, comme dans la partie KC; & dans la partie $k\,A$, comme dans la partie AK, en obſervant de prendre les angles z & α, toujours du point A de la premiere révolution. Cette opération fournira de nouvelles quantités A^{XII}, A^{XIII} &c. B^{XII}, B^{XIII} &c. C^{XII}, C^{XIII} &c. répondantes aux quantités A^{V}, A^{VI}, &c. B^{V}, B^{VI}, &c. de la premiere révolution.

65. Reprenant donc la grande formule du n°. 51, & mettant dans cette formule pour a', p', b', c' &c. ce que deviennent ces quantités, non plus lorſque $z = 2 \times 360 - \omega'$, comme dans ce n°. 51, mais lorſque $z = 2 \cdot 360$, on aura l'altération totale des deux révolutions, ou plutôt la partie de cette altération qu'on a nommée $\zeta + \vartheta''$ dans le §. XX. n°. 19. Après quoi on achevera le calcul ſuivant le procédé preſcrit dans ce §. XX; & on aura la

la différence cherchée de deux révolutions ſucceſſives.

XXXVII.

Dans les détails de cette opération, on peut employer pluſieurs abrégés de calcul dont je n'ai pas parlé; & qui ſe préſenteront aiſément à ceux qui mettront la main à l'œuvre.

1. Par exemple, quand on a trouvé p', q', r' &c. (5. préc. n. 51.) pour le cas de $z = 360°$, il ſera facile de les trouver pour le cas de $z = 2 . 360$; puiſque p' aura une valeur double, ainſi que r' & u', & que q' aura la même valeur dans les deux cas. On peut même obſerver (ce qui abrege le calcul) que cette valeur de q' ſera $= 0$.

2. Dans les quantités a', b', c' &c. & ſemblables, il faut diſtinguer trois parties: celle qui répond à $z = 360°$; celle qui répond à $z = 2 \times 360 - w'$; & celle qui répond à $z = 2 \times 360$; la ſeconde eſt compoſée de la premiere, & de plus de la ſomme des quantités A^{VIII}, A^{IX}, &c. ou B^{VIII}, B^{IX}, &c. depuis $z = 360°$, juſqu'à $z = 2 . 360 - w'$; la troiſiéme eſt compoſée de la ſomme de celles-ci, & de la ſomme des A^{XII}, A^{XIII}, &c. ou B^{XII}, B^{XIII} &c. depuis $z = 2 . 360 - w'$, juſqu'à $z = 2 . 360$.

3. Ainſi quand on ſera arrivé à $z = 360°$, on commencera par ajouter enſemble les quantités A', A'', A''' &c. déja trouvées, & mettre à part la ſomme qui en viendra; il faudra enſuite ajouter enſemble les quantités

analogues qu'on aura depuis $z = 360°$ jusqu'à $z = 2 \cdot 360 - \omega'$, & mettre à part la somme qui en viendra; laquelle ajoutée à la premiere somme, donnera la valeur de a' quand $z = 2 \cdot 360 - \omega'$. Enfin il faudra ajouter enſemble les quantités analogues qu'on aura depuis $z = 2 \cdot 360 - \omega'$, juſqu'à $z = 2 \cdot 360$; & ajouter cette ſomme aux deux précédentes, pour avoir la valeur de a' qui répond à $z = 2 \cdot 360$. On fera la même choſe pour les quantités b', c', e', &c.

4. Il faut de plus remarquer que les quantités α & ζ, trouvées art. XXXVI. n°. 52. doivent contenir non-ſeulement l'altération qui vient de l'action de Jupiter, mais auſſi celle qui vient de l'action de Saturne; autrement on n'auroit pas aſſez exactement dans le n°. 53. la poſition du rayon $C'''\Gamma$ (*fig.* 15.). Il faudra ſeulement avoir ſoin de ſéparer dans chacune de ces quantités α & ζ, ce qui vient de Jupiter, d'avec ce qui vient de Saturne, afin de voir plus nettement le réſultat de l'action de chacun, & de mieux diſtinguer toutes les différentes parties de l'opération.

5. Pour rendre les quantités P'', Q'', R'', V'' (§. préc. n. 37.) plus aiſées à calculer, & plus petites, il ſeroit bon; 1°. de les diviſer par 6, 283185, qui exprime la circonférence en parties du rayon, auquel cas on ſupprimeroit ce diviſeur de la formule du §. XXXVI. n°. 51; 2°. de dreſſer des tables des variables qui entrent dans les quantités P'', R'', V'', ſavoir des quantités $\frac{\alpha}{6,283185}$, $\frac{\text{fin. } \alpha}{6,283185}$,

& $\frac{\text{fin. } 2\,\alpha}{6,283185}$, ou, ce qui revient au même, des fractions qui expriment de degré en degré le rapport des angles, de leurs sinus, & du sinus des angles doubles, à 360°.

3°. A l'égard des opérations qui se font pour calculer l'action des Planètes depuis *A* jusqu'en *K* (*fig.* 17.), & depuis *k* jusqu'en *A*, ces opérations peuvent se trouver faites dans des tables toutes calculées, qui serviront pour un grand nombre de Comètes, & qui donneront les résultats pour le cas de $\frac{x}{4} - 1 = 1$, ou $x = 8$.

4°. Enfin on calculera toutes les constantes qui doivent multiplier les différentes variables, & on écrira ces différentes constantes sur des papiers séparés avec leur valeur algébrique & arithmétique, afin de les mieux reconnoître. Toutes ces opérations mettront plus de netteté & de promptitude dans les calculs.

6. Quelques personnes m'objecteront peut-être que j'aurois pû encore abréger l'opération, & en général la méthode du §. XX, en prenant, non les deux révolutions entieres avec les altérations, mais seulement les altérations. Cette objection tomberoit uniquement sur le calcul que nous avons fait des différentes portions elliptiques de l'orbite de la Comète, & de celle du Satellite; car au lieu de calculer le tems employé à décrire ces portions d'orbites elliptiques, on auroit pû se contenter de calculer les différences des tems entre ces portions d'orbites, & les portions correspondantes de l'ellipse primitive de la Comète.

7. Pour ſavoir ſi nous avons bien ou mal fait, la queſtion ſe réduit donc à celle-ci. Un mobile décrivant une ellipſe, ſuppoſons que la valeur & la direction de ſa viteſſe, & la valeur de ſon rayon vecteur, changent ſubitement en un point quelconque d'une très-petite quantité; eſt-il plus court de calculer immédiatement le tems dans la nouvelle ellipſe, & de le retrancher enſuite du tems dans la portion correſpondante de l'ellipſe primitive, que de calculer ſimplement les différences des deux tems? Or je crois la premiere de ces opérations plus courte que la ſeconde. Pour le faire ſentir par un exemple, je ſuppoſe qu'on cherche la poſition du nouveau périhélie par la formule $\frac{e' a'}{a' - \frac{S+C}{g'^2 h'^2}}$ du n°. 3. de l'art. XXVI; & je dis qu'on aura auſſi-tôt fait, & même plutôt fait, de chercher immédiatement la poſition du nouveau périhélie par cette formule, que de chercher le ſimple déplacement du périhélie par la formule $\frac{e\,da + a\,de}{a - \frac{S+C}{g^2 h^2}} - \frac{e\,a\,da}{\left(a - \frac{S+C}{g^2 h^2}\right)^2} + \frac{(S+C)\,e\,a}{\left(a - \frac{S+C}{g^2 h^2}\right)^2} \times \left(\frac{-g\,dg.h^2 - h\,dh.g\,g}{g^4 h^4}\right)$ qui me paroît demander un plus grand nombre de quantités à calculer. Il en ſera de même des autres cas ſemblables. Voilà les raiſons qui m'ont engagé à chercher immédiatement la valeur des deux révolutions totales, ſans me borner à la ſeule différence de ces révolutions, à laquelle j'aurois pû me reſtraindre.

8. Au reſte, ſoit qu'on calcule ſimplement les altérations, ſoit qu'on calcule les deux révolutions entieres, il n'en eſt pas moins vrai que la ſeule choſe qu'on cherche ici réellement, & qu'on détermine par le calcul, c'eſt la différence des deux révolutions; l'erreur, s'il y en a, ne peut tomber que ſur cette différence, parce que le reſte du calcul eſt fondé ſur la ſuppoſition qu'on a faite d'une certaine ellipſe *donnée* pour l'ellipſe primitive de la Comète, & que les erreurs ne peuvent par conſéquent tomber ſur la partie du calcul qui appartient uniquement à la révolution dans l'ellipſe primitive; c'eſt ce qui ſera parfaitement éclairci dans le Mém. ſuivant.

XXXVIII.

La méthode que nous avons donnée pour calculer les altérations de l'orbite des Comètes, a évidemment pluſieurs avantages.

1°. Dans toute la partie KAk, elle n'exige que des calculs arithmétiques fort ſimples, & d'après des formules algébriques qui ne demandent point de quadratures méchaniques; formules dont on peut repréſenter les réſultats dans des tables toutes dreſſées, & qui peuvent ſervir pour un grand nombre de Comètes.

2°. Dans les parties CE, & ec, la ſimplification des valeurs de φ & de π, épargne beaucoup de calculs. (*ſ.* XVI n. 3.)

3°. Dans la partie EDe, on n'a pas beſoin de calculer les forces φ & π; on fait ſeulement $\varphi = \frac{I}{\Delta^2}$, ce

qui réduit à presque rien le calcul des altérations dans cette partie *E D e*.

4°. Non-seulement nous avons divisé l'orbite de la Comète en plusieurs parties pour faciliter le calcul ; mais dans chacune de ces parties, le calcul se fait de la même maniere, & les angles d'anomalie z sont toujours pris à compter du périhélie *A* de la premiere révolution. Cette uniformité dans la marche du calcul, le rend tout-à-la-fois plus court & moins sujet à erreur ; parce qu'on a moins d'attention à faire au sens suivant lequel on prend les angles d'anomalie, & qu'on n'est point obligé de calculer séparément dans chaque portion de l'orbite, l'altération qu'elle éprouve par la portion précédente.

5°. On n'a jamais à calculer que des aires totales, telles que $\int X dz \cos. z$, $\int P X dz \cos. z$ &c. & il n'entre dans ces aires que des quantités P, X, Y &c. qui n'exigent aucune quadrature.

XXXIX.

1. Si on a quelque scrupule sur la méthode que nous avons employée pour trouver l'altération dans la partie *K A k* (*fig.* 17.), ce ne peut guères être que par rapport à l'action de Jupiter ; car l'action de Saturne étant environ trois fois moindre à la même distance, & la distance de Saturne au Soleil étant plus de vingt fois plus grande en *A* que celle de la Comète, & plus de dix fois en *K* ; je n'imagine pas qu'il puisse en résulter d'erreur sensible, ou au moins considérable sur l'altération causée par Saturne.

2. A l'égard de Jupiter, comme sa distance en A n'est qu'environ neuf à dix fois plus grande que celle de la Comète, & en K cinq à six fois seulement; on pourroit, si l'on craignoit l'effet de l'erreur qui en pourroit résulter, n'employer la méthode du §. XXII. pour Jupiter que jusqu'au point O où $\frac{x}{a} - 1 = -\frac{4}{9}$ (je prends la fraction $-\frac{4}{9}$ qui est un nombre quarré, afin que les quantités $\frac{x}{a} - 1$, $\frac{x}{a} - 1$, $\frac{x}{a} - 1$ &c. soient plus faciles à trouver); & on aura $x = \frac{13a}{9}$; & cos. z, ou $\frac{2a}{x} - 1 = \frac{18}{13} - 1 = \frac{5}{13}$. Ainsi on feroit depuis le point A jusqu'en O le même calcul qu'on a fait dans le §. XXXVI. depuis A jusqu'en K; & depuis O jusqu'en C le même qui a été fait depuis K jusqu'en C.

3. Cependant, comme le tems par AK ou kA est de moins de 40 jours, & que pendant ce tems l'effet de l'action des deux Planètes doit être comme infiniment petit, j'imagine qu'on pourra, sans erreur, employer la méthode du §. XXII. même pour Jupiter, sans avoir à craindre l'effet des négligences.

4. Enfin ceux qui craindroient encore, malgré les réflexions qu'on vient de lire, l'effet des négligences dans la partie AK pour l'action de Jupiter, pourroient calculer cette action rigoureusement depuis A jusqu'en C, comme on l'a calculée dans le §. XXXVI. depuis K jus-

qu'en C, & préciſément par la même méthode. Mais, comme le calcul ſeroit alors conſidérablement plus long, je voudrois qu'on ne l'eſſayât qu'après s'être aſſuré que les deux ſuppoſitions de $x = 2a$, & $x = \frac{13a}{9}$ pour Jupiter, donnent des réſultats aſſez différens depuis A juſqu'en C, pour produire une différence aſſez grande ſur le dernier réſultat, c'eſt-à-dire, ſur l'accélération ou la rétardation de la ſeconde période par rapport à la premiere.

XL.

1. Un autre ſcrupule qu'on peut avoir, c'eſt ſur les forces négligées dans la partie ſupérieure de l'orbite. Car dans la force φ, la quantité négligée, en prenant ξ' pour la diſtance réelle de la Planète au Soleil, & ζ' pour l'angle d'élongation réel de la Planète à la Comète, eſt $-\frac{3J.\xi'^2}{2x^4} + \frac{9J.\xi'^2 \text{ cof. } \zeta'^2}{2x^4}$: or cette quantité étant toujours poſitive, on pourroit craindre peut-être que l'effet n'en fût aſſez grand pour n'être pas négligé.

2. Pour examiner cette difficulté, nous remarquerons d'abord que cette quantité négligée ſe change en $\frac{J\xi'^2}{x^4} \times (\frac{3}{4} + \frac{2}{4} \text{ cof. } 2\zeta')$ dans laquelle il n'y a réellement de conſtamment poſitive, que la partie $\frac{3J.\xi'^2}{4x^4}$, l'autre étant tantôt poſitive & tantôt négative, & changeant même fréquemment de ſigne dans la partie ſupérieure de

de l'orbite, parce qu'il répond plusieurs révolutions de chacune des deux Planètes perturbatrices, au mouvement de la Comète dans cette partie supérieure de son orbite. On peut donc négliger cette partie, d'autant plus qu'elle est moindre que la partie $\frac{2J.\xi' \text{ cos. } \zeta'}{x^3}$ négligée par d'autres Géometres dans l'action de la Planète sur le Soleil; partie d'action qui est aussi tantôt positive, tantôt négative, & qui change beaucoup moins de signe dans cette même portion supérieure de l'orbite, que la partie $\frac{9J.\xi' \text{ cos. } 2\zeta'}{4x^4}$.

3. Il n'y auroit donc d'effet un peu sensible à craindre, que de la partie $\frac{3J.\xi'^2}{4x^4}$. Or si on considere que cette partie de la force perturbatrice est à la force de la gravitation, comme $\frac{3J.\xi'^2}{4x^2}$ est à S, ou comme $\frac{3J.\xi'^2}{4S.x^2}$ est à 1; & qu'ainsi au point où $x = 2000000$, elle est pour Jupiter à-peu-près comme $\frac{3}{4000 \times 16}$ est à 1, & pour Saturne, à-peu-près comme $\frac{3}{12000 \times 4}$ est à 1; on verra qu'on peut les négliger sans crainte, d'autant que ce rapport devient toujours de plus en plus petit dans la même raison que le quarré de x^2 augmente.

4. A l'égard de la force π, dont tous les termes sont multipliés par sin. ζ', & dont par conséquent la partie négligée change souvent de signe dans la portion supé-

rieure de l'orbite, on peut à plus forte raiſon négliger cette force π.

5. Néanmoins ſi quelque Calculateur ſcrupuleux vouloit avoir égard à la partie $\frac{3J.\xi'^2}{4x^4}$ de la force φ, il le pourroit aiſément.

6. Pour cela, il ſuffiroit d'ajouter à la valeur de φ trouvée pour la partie $ED\epsilon$, c'eſt-à-dire à $\frac{J}{x^2}$, la partie $\frac{3J.\xi'^2}{4x^4}$; en regardant même ξ' comme conſtante & comme égale à la diſtance moyenne de la Planète perturbatrice au Soleil. Les formules du §. XXXIII. donneront des moyens courts & faciles de calculer la petite quantité qui réſultera de cette nouvelle conſidération.

XLI.

1. Pour trouver le mouvement & la variation du périhélie d'une révolution à l'autre, on s'y prendra de la maniere ſuivante.

Il eſt facile de voir par ce qui a été dit dans le §. XIX;

1°. Qu'on peut chercher d'abord la variation & le mouvement du périhélie, en cherchant les altérations de l'orbite $ACDA$ (*fig.* 13.) par les forces φ & π, & enſuite en traitant comme des portions d'ellipſes les portions d'orbites décrites par la Comète & par le Satellite que nous lui avons ſuppoſé.

2°. Que de ces portions d'orbites, regardées comme

elliptiques, il suffira de considérer la seule portion que la Comète décrit depuis le point C''' de la fig. 15, puisque cette portion d'orbite est la seule dont il soit nécessaire de comparer le périhélie au périhélie A, d'où la Comète a été supposée partir.

2. Par conséquent, comme l'on connoît (§. XX. n°. 17.) le rayon vecteur SC''', ainsi que la direction & la viteſſe de la Comète au point C'''; on aura facilement par les formules des §. XXVI. & XXVIII. la distance & la position du périhélie dans cette orbite, considérée comme elliptique.

3. Retranchant cette distance de la distance périhélie 44851 observée en 1661, on aura *à cet égard* la variation du périhélie, ou l'altération de la distance périhélie, que j'appellerai Π.

4. On aura de même, en comparant la position du nouveau périhélie avec celle du périhélie de 1661, le mouvement du périhélie à cet égard, que je nomme Γ.

5. Voilà donc déja une partie du mouvement & de la variation du périhélie, en regardant les portions d'orbite de la Comète & du Satellite comme des ellipses. Il nous reste à chercher ce mouvement & cette variation, en vertu des forces φ & π, agissant dans l'orbite $ACDA$ depuis 1661.

6. Pour cela on remarquera qu'au périhélie on a; 1°. $dx = 0$, & par conséquent $du = 0$, ou (§. X.) $-a \sin. z + \frac{S+C}{gg} \sin. z = \cos. z \int M dz \cos. z - \sin. z \int M dz$

$\text{sin. } \zeta = o$, ou $\text{sin. } \zeta = \frac{1}{\frac{S+C}{gg} - a} \times [\text{cos. } \zeta \int M d\zeta \text{ cos. } \zeta + \text{sin. } \zeta \int M d\zeta \text{ sin. } \zeta]$.

2°. Qu'au même périhélie on a $x = \frac{a\,a}{u} = a\,a$: $[a \text{ cos. } \zeta + \frac{S+C}{gg} - \frac{S+C}{gg} \text{cos. } \zeta - \text{sin. } \zeta \int M d\zeta \text{ cos. } \zeta + \text{cos. } \zeta \int M d\zeta \text{ sin. } \zeta] = (\text{en faisant } a \text{ cos. } \zeta + \frac{S+C}{gg} - \frac{S+C}{gg} \text{ cos. } \zeta = a,$ comme cela arrive en effet lorfque $z = 360°$.) $a + \text{sin. } z \int M d\zeta \text{ cos. } \zeta - \text{cos. } z \int M d z \text{ sin. } z = (\S.\text{ XIX.})\ a - \text{cos. } z \int X d\zeta \text{ sin. } \zeta + \text{sin. } \zeta \int X d\zeta \text{ cos. } \zeta - \overline{\text{cos. } \zeta - 1} \cdot \frac{2S}{gg} \times \int Y d\zeta + \text{cos. } \zeta \cdot \frac{2S}{gg} \int Y d z\ (1 - \text{cos. } z) - \frac{2S \text{ sin. } \zeta}{gg} \int Y d z \text{ sin. } z = (\text{en faisant cos. } z = \text{cos. } 360°. = 1, \& \text{ sin. } z = \text{sin. } 360°. = o) a - \int X d z \text{ sin. } z + \frac{2S}{gg} \times \int Y d z\ (1 - \text{cos. } z)$.

Or les quantités $\int X d z \text{ sin. } z$ & $\frac{2S}{gg} \int Y d z\ (1 - \text{cos. } z)$ ont été calculées §. XXXVI. dans les opérations qui ont été faites pour trouver l'altération causée par les forces φ & π depuis 1661. On cherchera donc dans les réſultats de ces opérations, la valeur de ces quantités depuis le périhélie de 1661, juſqu'au ſuivant : pour cela il faudra chercher dans les calculs déja faits au §. XXXVI. la valeur de ces quantités, depuis le point où $\zeta = 360°$ juſqu'à celui où $z = 2 \cdot 360$; par-là on aura la nouvelle diſtance périhélie; par conſéquent en retranchant cette diſtance

de 44851, on connoîtra la nouvelle altération du périhélie en vertu des forces φ & π, altération que je nomme Π'. Ajoutant cette altération, avec le ſigne qui la caractériſe, à la quantité Π déja trouvée, on aura $\Pi + \Pi'$ pour la variation totale de la diſtance périhélie.

7. A l'égard du mouvement du périhélie, ou plutôt de ſa poſition nouvelle, on le trouvera par l'équation $\text{ſin. } z = \frac{1}{\frac{aa}{p} - a} \times \int M dz \text{ cof. } z, \int M dz \text{ cof. } z$ étant égal à ce que devient $\int X dz \text{ cof. } z + \frac{2aa}{p} \int dz \text{ cof. } z \int Y dz$ lorſque $z = 360°$; cette derniere quantité eſt égale à $\int X dz \text{ cof. } z + \frac{2aa}{p} \text{ ſin. } z \int Y dz - \frac{2aa}{p} \int Y dz \text{ ſin. } z = \int X dz \text{ cof. } z - \frac{2aa}{p} \int Y dz \text{ ſin. } z$. Or ces deux dernieres quantités ont auſſi été calculées dans les opérations du §. XXXVI.

8. Par-là on connoîtra le mouvement du périhélie en vertu des forces φ & π; ce mouvement étant appellé Γ', & ajouté au mouvement déja trouvé Γ, on aura $\Gamma + \Gamma'$ pour le mouvement cherché.

9. Au reſte, comme une petite erreur dans la valeur du rayon vecteur peut en produire une beaucoup plus grande dans la poſition du périhélie, il ne faudra point s'étonner ſi en conſéquence des quantités négligées dans ce calcul, le réſultat ne répond pas toujours fort éxactement aux obſervations. Par exemple, les calculs faits

par la théorie pour la Comète de 1682, ont donné 6′ 33″ de mouvement direct au périhélie, depuis 1682 juſqu'en 1759; & les obſervations rapportées dans la *Connoiſſance des Tems* de 1761, donnent 1°. 40′; c'eſt-à-dire, que le réſultat des obſervations eſt environ 15 fois plus grand que celui de la théorie; différence énorme, & qu'il faut attribuer, comme nous l'avons dit, aux erreurs conſidérables qu'on ne peut éviter dans cette recherche.

10. A l'égard de la diſtance périhélie de cette même Comète, la théorie a donné une diminution de $\frac{3}{10000}$ de la diſtance moyenne de la Terre au Soleil depuis 1682 juſqu'en 1759; & les obſervations la donnent au-delà de trois fois plus grande, ſavoir, de $\frac{1}{1000}$. Au reſte les obſervations elles-mêmes ſont ſujettes à quelqu'erreur dans le réſultat qu'elles donnent ſur la diſtance & ſur la poſition de la Comète périhélie; tant par les erreurs qui peuvent ſe gliſſer dans les lieux de la Comète, que par la ſuppoſition qu'on fait que la Comète décrit dans la partie viſible de ſon orbite, ou une Parabole exacte, ou une Ellipſe dont les Elémens ne ſont jamais bien connus.

XLII.

1. A l'égard du mouvement des nœuds & de la variation de l'inclinaiſon de l'orbite de la Comète ſur le plan de l'orbite de la Planète perturbatrice, nous avons donné dans les Mémoires de l'Académie de 1745, p. 380,

les formules au moyen desquelles on y peut parvenir. On peut démontrer ces formules par les moyens que nous avons exposés dans nos *Recherches sur le Système du Monde*, art. 11 & 12. Mais pour ne pas y renvoyer nos Lecteurs, nous allons mettre ici ces formules & leur démonstration.

2. Soit comme ci-devant DCB (*fig.* 19) l'orbite de la Comète, DSB la ligne des nœuds de son orbite avec l'orbite de la Planète perturbatrice. Soit J le lieu de la Planète rapporté sur l'orbite de la Comète, l'angle $JSB = V$, l'angle $CSD = v'$, la distance de la Planète à la Comète $= k$, & la distance accourcie JS de la Planète au Soleil $= \xi$. Il est aisé de voir; 1°. que le point C est tiré perpendiculairement à l'orbite par une force $= \frac{J.\xi \text{ sin. } V}{k^3} \times \text{tang. incl.} - \frac{J \text{ sin. } V \text{ tang. incl.}}{\xi^2 (1 + mm \text{ sin. } V^2)^{\frac{1}{2}}}$; quantité dans laquelle on peut mettre, au lieu de tang. incl. sa valeur $\frac{\text{sin. incl.}}{\text{cos. incl.}}$; 2°. que la petite ligne parcourue perpendiculairement au plan DCB, en vertu de cette force, est $\frac{d\,s^2}{b^2} \times \left(\frac{J}{k^3} \times \xi \text{ sin. } V \frac{\text{sin. incl.}}{\text{cos. incl.}} - \frac{J \text{ sin. } V \text{ sin. incl.}}{\xi^2 (1 + mm \text{ sin. } V^2)^{\frac{1}{2}} \text{ cos. incl.}} \right)$; 3°. qu'en vertu de cette petite ligne parcourue, la ligne des nœuds SO, change sur le plan de l'orbite de la Planète perturbatrice, en se mouvant de D vers J, d'une quantité $= \frac{d\,s^2}{p^2} \times \left(\frac{J'}{k^3} \right.$

$\times \frac{\xi \text{ fin. } V \text{ fin. incl.}}{\text{cof. incl.}} - \frac{J \text{ fin. } V \text{ fin. incl.}}{\xi^2 (1 + mm \text{ fin. } V^2)^{\frac{1}{2}} \text{ cof. incl.}}) \times$

$\frac{CO}{Cc} \times \frac{1}{\text{fin. incl.}} \times \frac{1}{SO}$; 4°. en menant Cd parallèle à SD, & décrivant l'arc CN du rayon SC, on aura $\frac{CO}{Cc} = \frac{SO}{Cd}$; & $Cd = \frac{CN}{\text{fin. } v'} = \frac{x\, d\zeta}{\text{fin. } v'}$: faisant donc ces substitutions dans la formule précédente, mettant ξ' pour exprimer la distance réelle de la Planète au Soleil, & effaçant ce qui se détruit, il vient pour l'Elément du mouvement des nœuds

$$\frac{d s^2}{\nu^2} \times \left(\frac{J \xi}{k^3} - \frac{J \xi}{\xi'^3} \right) \times \frac{\text{fin. } V \text{ . fin. } v'}{x\, d\zeta} \times \frac{1}{\text{cof. incl.}}$$

Dans cette formule on mettra pour $\frac{d s}{\nu}$ sa valeur approchée $\frac{x\, x\, d\zeta}{a\, g}$, pour $a\, g$ sa valeur $\sqrt{S \cdot p}$, & pour $\frac{1}{\text{cof. incl.}}$ sa valeur secant. incl.

3. A l'égard de la variation de l'inclinaison ; si on appelle, comme au commencement de ce Mémoire, la tangente de l'inclinaison m, on trouve que $\frac{x \text{ fin. } v' \times \text{fin. incl.}}{m}$ est la cotangente de l'inclinaison, en prenant pour sinus total la perpendiculaire x fin v' fin. incl. menée de la Comète C sur le plan de l'orbite de la Planète. Or cette cotangente diminue d'une quantité égale au mouvement des nœuds multiplié par x cof. v'. Donc si on appelle $d\zeta$ le mouvement trouvé des nœuds, on aura la différentielle de la cotangente de l'incl. $= \frac{-d\zeta \cdot x \text{ cof. } v'}{x \text{ fin. } v' \text{ fin. incl.}}$

$=$

$= \frac{-ds^2}{y^2} \times \left(\frac{J:\xi}{k^3} - \frac{J.\xi}{\xi'^3}\right) \frac{\text{fin. } V \text{ cos. } v'}{x\,dz} \times \frac{1}{\text{cos. incl.}}$

$\times \frac{1}{\text{fin. incl.}}$; dans laquelle on peut mettre au lieu de $\frac{1}{\text{cos. incl.}} \times \frac{1}{\text{fin. incl.}}$ sa valeur $\frac{2}{\text{fin. 2 incl.}} = 2 \times \text{cosec.}$ du double de l'incl.

4. On peut rendre assez court ce calcul du mouvement des nœuds & de la variation de l'inclinaison, en considérant; 1°. que $\frac{ds^2}{y^2\,x\,dz} = \frac{x^3\,dz}{aagg} = \frac{x^3\,dz}{S.p}$; 2°. que les quantités $\frac{J\xi x^3}{k^3}$, & $\frac{J\xi x^3}{\xi'^3}$ ont été calculées dans les opérations qu'on a faites au §. XXXVI, pour trouver les quantités X & Y; 3°. que depuis le point C (*fig.* 13.) jusqu'au point E, & depuis le point e jusqu'au point c, on peut mettre au lieu de $\frac{J:\xi}{k^3} - \frac{J.\xi}{\xi'^3}$ (§. XVI.) la quantité $\frac{J.\xi}{k^3} - \frac{J\xi}{x^3}$, dont le second terme rendra les opérations plus faciles, parce qu'étant multiplié par x^3, il se réduit à $-J.\xi$; 4°. que depuis le point E jusqu'au point correspondant e, c'est-à-dire, dans toute la partie supérieure de l'orbite, on peut négliger entiérement l'effet des forces perturbatrices; ensorte qu'on n'a de calcul à faire que pour les parties AE, eA; 5°. que depuis A jusqu'en K (*fig.* 17.) & depuis k jusqu'en A, on peut au lieu de x mettre $\frac{2a}{1+\text{cos. }z}$, & au lieu de $\frac{J}{k^3}$ sa valeur approchée $\frac{J}{\xi'^3} + \frac{3J\xi \times \text{cos. }\zeta}{\xi'^5}$.

ce qui réduira la quantité $\frac{J.\xi}{k^2} - \frac{J.\xi}{\xi^3}$ à $+\frac{3J.\xi \times \text{cos.}\zeta}{\xi^4}$.

5. Ainſi pour calculer la variation des nœuds & de l'inclinaiſon, il faudra depuis A juſqu'en K, c'eſt-à-dire, depuis $z = e$ juſqu'à $z = 90°$, ſe ſervir des formules ſuivantes.

1°. pour le nœud; $d\zeta = \frac{x^4\, dz}{S.p} \times + \frac{3J\xi \text{cos.}\zeta}{\xi^4}$ $\times$ sin. V. sin. $v' \times$ sec. incl. 2°. $\frac{x^4\, dz}{S.p} \times + \frac{3J.\xi \text{cos.}\xi}{\xi^4}$ $\times$ sin. V cos. $v' \times$ 2 cosec. 2 incl. (pour l'inclinaiſon).

On ſe ſouviendra que ξ & ξ' ſont ici regardées comme conſtantes (§. XXI & XXIII); que $x = \frac{2a}{1 + \text{cos.}z}$; que cos. ζ = cos. $A + z$ = cos. A cos. z — sin. A. sin. z; que sin. V eſt auſſi regardé comme conſtant; & que $v' = 180 - V - \zeta = (\S.$ XXIII.$) 180 - V - A - z$; d'où l'on tire sin v' = sin. $180 - V - A - z$ = sin. $(180 - V - A)$ cos. z — sin. z cos. $180 - V - A$ = sin. $(V + A)$ cosin. z + sin. z cos. $V + A$.

Par ces formules & par celles du §. XXXIII, on trouvera facilement le mouvement des nœuds & la variation de l'inclinaiſon pour les parties AK, kA.

6. Dans les parties KC, ek, on employera les formules des n°. 2 & 3. du préſent Paragraphe.

7. Enfin dans les parties CE, ec, on employera les formules

$$d\zeta = \left(\frac{x^3\, dz}{S.p} \times \frac{J.\xi}{k^3} - \frac{J\xi\, dz}{S.p}\right) \times \text{sin.}\, V \,\text{sin.}\, z^4$$

& sec. incl.

Et $\left(\frac{x^3\,dx}{S.p} \times \frac{J.\xi}{k^3} - \frac{J\xi\,dz}{S.p}\right) \times$ sin. V cos. $v' \times$ 2 cosec. 2 incl.

8. On peut remarquer, si cela contribue à abréger le calcul, que $v' = 180 - V - \zeta$; & que par conséquent

$$\text{sin. } V \times \text{sin. } v' = \frac{-\text{cosin. } V + v'}{2} + \frac{\text{cosin. } V - v'}{2} =$$

$$\frac{\text{cosin. } 180 - \zeta}{2} + \frac{\text{cosin. } -180 + 2V + \zeta}{2} = \frac{\text{cosin. } \zeta}{2} -$$

$$\frac{\text{cosin. } 2V + \zeta}{2} = \frac{\text{cosin. } \zeta}{2} - \frac{\text{cosin. } 360 - 2v' - \zeta}{2} =$$

$$\frac{\text{cosin. } \zeta}{2} - \frac{\text{cosin. } 2v' + \zeta}{2}; \text{ \& que sin. } V \text{ cos. } v' =$$

$$\frac{\text{sin. } V + v'}{2} + \frac{\text{sin. } V - v'}{2} = + \frac{\text{sin. } \zeta}{2} - \frac{\text{sin. } 2V + \zeta}{2}$$

$$= + \frac{\text{sin. } \zeta}{2} + \frac{\text{sin. } 2v' + \zeta}{2}.$$

9. On pourra se servir des unes ou des autres de ces formules, selon qu'on voudra faire disparoître V ou v': mais V paroît plus commode à chasser.

10. Après avoir fait cette opération, il en reste encore une autre qui n'est pas longue; c'est de trouver la variation des nœuds & de l'inclinaison, en regardant comme des ellipses, les portions d'orbites décrites par la Comète & par le Satellite.

11. Pour cela on prendra, comme dans le §. XXXVI, le point C (*fig.* 19.) où $SC =$ la distance moyenne de Jupiter, & on tirera d'abord la tangente CO à l'orbite, laquelle coupera en O la ligne des nœuds.

12. On cherchera ensuite par le moyen des formules

du §. XXXIV. & du §. XXXVI n°. 53 & suiv. la viteſſe du Satellite dans ſa petite orbite, entant que cette viteſſe eſt eſtimée perpendiculairement à l'orbite de la Comète.

13. On dira enſuite: comme la viteſſe g de la Comète ſuivant CO, eſt à cette viteſſe perpendiculaire qu'on vient de trouver; ainſi le ſinus total ou 57° 17′ 44″, eſt à un quatriéme terme, lequel exprimera un angle fort petit.

14. On nommera α cet angle, & on prendra la quantité $\frac{\alpha \times CO - \frac{J}{S}\xi \text{ ſin. } V.m}{SO} \times$ coſec. incl. pour la poſition du nœud de l'orbite réelle que le Satellite décrit dans l'eſpace abſolu, lorſque la Comète eſt parvenue en C; c'eſt-à-dire, pour l'angle que la ligne des nœuds de cette orbite fait avec $S\,D$.

15. Dans cette formule, $\frac{J\xi m \text{ ſin. } V}{S}$ eſt la hauteur du petit Satellite au-deſſus du plan de l'orbite de la Comète; hauteur à laquelle il faut avoir égard pour déterminer la poſition de la ligne des nœuds. Au reſte nous n'avons pas beſoin d'avertir que les quantités α & $\frac{J\xi \text{ ſin. } V.m}{S}$ doivent être priſes avec les ſignes convenables, ſelon les ſituations reſpectives des orbites, & celles de la Comète & de la Planète perturbatrice. Examen qu'il faut laiſſer à l'attention du Calculateur, & qui n'eſt pas difficile. Dans les figures ſur leſquelles on a fait les calculs précédens, on ſuppoſe que le plan de l'orbite de la

Planète perturbatrice eſt élevé au-deſſus du plan de l'orbite de la Comète, & que la Planète perturbatrice ſoit dans cette partie de ſon orbite; d'où l'on voit que le Satellite, qui eſt toujours à 180 degrés de la Planète perturbatrice, ſera au-deſſous du plan de l'orbite de la Comète.

16. Lorſque le Satellite ſera en c (*fig.* 13.), au point où $Sc = SC$, alors on trouvera par une formule ſemblable la poſition du nœud de l'orbite, qui redevient alors celle de la Comète.

17. Pour avoir dans les deux mêmes cas la variation de la cotangente de l'inclin. il faut multiplier le mouvement trouvé du nœud par $\frac{\text{cof. } \nu'}{\text{ſin. } \nu' \text{ ſin. incl.}} = \text{cot. } \nu' \text{ coſec. incl.}$

18. On trouvera donc par ce moyen le mouvement des nœuds & la variation de l'inclinaiſon, en regardant les portions d'orbites de la Comète & du Satellite, comme des ellipſes. On joindra à cette opération le réſultat de celles par leſquelles on a trouvé ces mêmes variations, en ayant égard aux forces perturbatrices, & on aura la variation totale.

19. Après quoi ce ſera une opération de Trigonométrie ſphérique fort ſimple, que de trouver la variation des nœuds & de l'inclinaiſon par rapport à l'ecliptique. Car ayant la poſition nouvelle du nœud & de l'inclinaiſon par rapport à l'orbite de la Planète perturbatrice, on aura cette poſition & cette inclinaiſon par rapport à l'écliptique, & par conſéquent la variation des

nœuds & de l'inclinaiſon par rapport à ce même grand cercle.

20. Au reſte il ne faut pas s'attendre ici à une préciſion plus grande que dans les calculs du périhélie, & par la même raiſon. Par exemple, dans la Comète de 1682, la théorie a donné pour le nœud un mouvement de 1° 29′ 11″ en 1759, ſuivant l'ordre des ſignes; & les obſervations donnent le double, ſavoir 3° 1′. La même théorie donne 6′ 36″ pour la diminution de l'inclinaiſon depuis 1682, & les obſervations donnent 3′, c'eſt-dire, moins de la moitié. On ne doit donc point exiger ni eſpérer ſur cet article beaucoup d'exactitude dans le réſultat des calculs tirés de la théorie.

21. En général toutes les inégalités du mouvement des Comètes venant d'une force qui agit alternativement en différens ſens, il ne faut point être ſurpris que le réſultat du calcul puiſſe être fort différent de l'obſervation: parce que ce réſultat eſt compoſé d'un grand nombre de parties, dont les unes ſe retranchent des autres; & que la différence, qui eſt le réſultat qu'on cherche, peut être à-peu-près du même ordre que les quantités qu'on a négligées; auquel cas il ne ſeroit point ſurprenant que le réſultat de la théorie fût double ou triple &c. ou la moitié, ou le tiers, de celui des obſervations. Le Calculateur doit même ſe trouver fort heureux, ſi le réſultat de la théorie n'eſt pas quelquefois en ſens contraire de celui que les obſervations donnent, comme cela pourroit très-bien arriver, quelque exacti-

tude qu'il eût miſe dans ſes calculs. Car ſi le réſultat cherché eſt la différence de deux nombres conſidérables, l'un poſitif, l'autre négatif, peu différens l'un de l'autre, & que dans chacun de ces nombres il y ait une erreur de pluſieurs unités, il ſe pourra faire que le réſultat des deux erreurs combinées ſoit plus grand que la différence des deux nombres; & alors le réſultat de la théorie ſe trouveroit en ſens contraire de l'obſervation.

22. De-là on doit tirer deux conſéquences; 1°. qu'il ne faut compter que juſqu'à un certain point ſur l'exactitude des calculs, dans la théorie des perturbations des Comètes; 2°. que l'inexactitude, s'il y en a, pourra venir ſouvent de la nature du Problême, & non pas de la faute du Calculateur.

23. On pourroit joindre à ces recherches ſur les perturbations des Comètes, la théorie de la réſiſtance qu'elles éprouveroient de la part d'un milieu très-rare où on les ſuppoſeroit ſe mouvoir; on trouveroit les fondemens de cette théorie, & les principes néceſſaires pour la développer, dans nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, IIe Partie Liv. II. Chap. VI; où nous avons traité des Trajectoires dans des milieux réſiſtans. Mais j'abandonne, au moins quant à préſent, cette recherche aux calculs des Mathématiciens, pour deux raiſons; 1°. parce qu'on ne peut faire que des ſuppoſitions vagues ſur la nature du milieu, dans lequel les Comètes ſe meuvent; 2°. parce que cette recherche forme une des branches de la queſtion propoſée par l'Académie des Sciences, pour le

Prix de l'année prochaine 1762; à quoi je dois ajouter que M. Euler a déja donné un ſavant Eſſai ſur ce ſujet, en 1746, dans le premier Volume de ſes *Opuſcules*.

CONCLUSION.

1. En finiſſant ce Mémoire, je crois devoir remettre ſous les yeux du Lecteur les avantages particuliers à ma méthode pour calculer les perturbations des Comètes. Quoique ces avantages ſoient déja indiqués en différens endroits de ma théorie, il ne m'a pas paru inutile de les réunir tous ici ſous un même point de vûe, en y ajoutant quelques remarques qui ſerviront encore à les rendre plus ſenſibles.

1°. Dans toute la partie de l'orbite où la diſtance de la Comète au Soleil eſt plus grande que vingt fois le rayon du grand orbe, c'eſt-à-dire, que vingt fois la diſtance moyenne de la Terre au Soleil; ma méthode non-ſeulement abrege conſidérablement le calcul des perturbations, mais (§. XV. n°. 3. & XVIII. n. 9.) le réduit preſque à rien, au calcul du mouvement dans une ellipſe; ſans qu'on ait beſoin de chercher dans cette partie de l'orbite la poſition de la Planète perturbatrice, dont la détermination dans cette partie (§. XVI. n. 2.) pourroit être fort ſujette à erreur.

2°. Dans la plûpart des Comètes, ma méthode abrege beaucoup le calcul (§. XXI, XXII & XXIII.) pour la partie qui s'étend depuis le périhélie juſqu'à 90 degrés de part & d'autre; elle diſpenſe d'avoir recours pour cette

cette partie à des quadratures de courbes méchaniques.

3°. Depuis le point où la distance de la Comète au Soleil est égale à celle de Jupiter, jusqu'au point où le rayon vecteur de la Comète est égal à vingt fois le rayon du grand orbe; ma méthode donne encore (§. XVI. n. 3. & XVII. n. 2.) le moyen d'abréger le calcul, non pas en supprimant absolument les quadratures méchaniques, mais en rendant plus simples les quantités qui y entrent.

4°. Cette même méthode (§. XIX. art. 11 & 16.) réduit tout à des quadratures simples & totales, & jamais à des quadratures représentées par un double signe d'intégration; ce qui rend tout-à-la-fois les approximations plus faciles, & plus susceptibles d'une éxactitude poussée aussi loin qu'on voudra.

5°. Pour connoître la position de la Planète perturbatrice par rapport à la Comète, lorsque celle-ci se rapproche de son périhélie vers la fin de la seconde révolution; je n'ai pas besoin (§. XX. art. 15 & 16.) de faire une fausse supposition sur ce périhélie; supposition qui peut produire une erreur assez considérable & assez à craindre dans la position de la Planète perturbatrice; car si on commettoit, par exemple, une erreur de neuf mois ou davantage dans le tems supposé du périhélie, cette erreur en entraîneroit une de plus de vingt degrés dans la position de Jupiter, & par conséquent pourroit occasionner (§. XVI. n°. 2.) un mécompte très-considérable dans l'estimation des forces perturbatrices & de leur effet.

6°. Un autre avantage de ma méthode, c'eſt de faire toujours marcher les ζ d'un même côté, dans le ſens du mouvement de la Comète : ce qui rend le calcul plus ſimple, & moins ſujet aux mépriſes que pourroit occaſionner la marche des ζ en différens ſens. Ceux qui ont employé cette marche alternative des ζ en ſens contraires dans la recherche des perturbations des Comètes, s'y ſont crus obligés par une autre ſuppoſition qu'ils avoient faite, & qui conſiſte à employer dans leurs calculs l'anomalie excentrique, au lieu de l'anomalie vraie. Pour nous, nous avons cru pouvoir nous en tenir ſans danger à l'anomalie vraie, ſans y ſubſtituer l'anomalie excentrique, & cela pour pluſieurs raiſons. La premiere, parce que dans la partie inférieure de l'orbite (dans celle qui eſt la plus proche du Soleil), les rayons vecteurs exprimés par les anomalies vraies, ont un accroiſſement moins rapide par rapport à ces anomalies, & par conſéquent varient moins que par rapport aux anomalies excentriques (*a*). La ſeconde, parce que dans la partie qui s'étend depuis le périhélie juſqu'à 90 degrés de part & d'autre, l'orbite de la Comète pouvant être priſe pour une Parabole, la conſidération des rayons vec-

(*a*) En effet quand le rayon vecteur eſt devenu, par exemple, le double de la diſtance périhélie, l'anomalie vraie eſt déja d'environ 90 degrés, au lieu que l'anomalie excentrique n'eſt encore que d'un aſſez petit nombre de degrés ; par exemple, de 14 environ, dans la Comète de 1682. Les rayons vecteurs varient donc moins dans la partie inférieure de l'orbite, par rapport à l'anomalie vraie, que par rapport à l'anomalie excentrique.

teurs exprimés par les anomalies vraies, rend les intégrations beaucoup plus faciles & les calculs moins pénibles ſans comparaiſon (§. XXI. & XXII.), que par les anomalies excentriques, dont la conſidération ſuppoſe qu'on regarde l'orbite de la Comète comme une ellipſe. La troiſiéme, c'eſt que dans la partie ſupérieure de l'orbite, dans celle qui eſt la plus éloignée du Soleil, & où les rayons vecteurs croiſſent aſſez rapidement, ces rayons n'apportent aucun inconvénient aux calculs, ſoit parce qu'une grande portion de cette partie ſupérieure eſt ſenſiblement elliptique (§. XV. n. 3.) & ne demande aucun calcul; ſoit parce que la conſidération du Satellite fait diſparoître en grande partie (§. XVI. n°. 3.) le rayon vecteur x des calculs qu'on eſt obligé de faire. Enfin la quatriéme raiſon, c'eſt que la conſidération des anomalies excentriques introduiroit dans une partie de la quantité M (§. IX. n. 3.) les rayons vecteurs qui répondent à ces anomalies, & que ces rayons vecteurs ſe trouvant placés au dénominateur, & décroiſſant prodigieuſement par rapport aux derniers degrés d'anomalie excentrique, produiſent des ſauts conſidérables dans la quantité M; ce qui peut occaſionner des erreurs aſſez fortes dans les quantités dérivées de celle-là.

7°. Quoique dans ma ſolution on paſſe pluſieurs fois de l'orbite de la Comète à celle du Satellite fictif dans l'eſpace abſolu, & de celle-ci à celle de la Comète; ces paſſages n'empêchent point le calcul d'être uniforme & ſimple dans ſa marche. On n'a pas beſoin, par exemple,

quand on paſſe de l'orbite de la Comète à celle du Satellite (ce qui arrive au point C de la fig. 13. où $SC =$ la diſtance moyenne de Jupiter); on n'a pas beſoin, dis-je, de chercher par un calcul particulier, l'altération que l'action *précédente* des Planètes perturbatrices dans la partie AC, doit produire dans la partie *ſubſéquente* CDc de l'orbite de la Comète, c'eſt-à-dire, dans celle à laquelle on ſubſtitue l'orbite $\gamma o \gamma'$ (*fig.* 14.), que le Satellite fictif γ décrit dans l'eſpace abſolu. On n'a pas beſoin non plus, en conſidérant cette derniere orbite $\gamma o \gamma'$, de chercher l'altération que l'action *précédente* des Planètes perturbatrices ſur la Comète dans la partie AC, a dû produire dans la viteſſe & dans la direction initiale du Satellite. Voici la preuve de ces deux propoſitions.

2. Ne conſidérons, pour abréger, dans la quantité qui exprime l'altération du tems périodique (§. XIX. n. 10.), que le terme $\int dP \int X dz$ ſin. z, ou (en faiſant X ſin. $z = X'$) $\int dP \int X' dz = P \int X' dz - \int P X' dz$; on fera ſur chacun des autres termes le même raiſonnement que nous allons faire. Lorſque la Comète eſt arrivée au point C, où l'on paſſe de ſon orbite à celle du Satellite, ſoit $z = \zeta$, π la valeur de P, α celle de $\int X' dz$, & ζ celle de $\int P X' dz$, répondantes à $z = \zeta$; il eſt évident que la viteſſe & la direction que la Comète auroit eûe au point C, ſans perturbation, ont ſouffert par l'action précédente des Planètes perturbatrices, une altération telle, que ſi cette action ceſſoit en ce moment, l'altération du tems dans la ſuite de la période ſeroit $P\alpha - \zeta$.

3. Or comme l'orbite du Satellite dans l'eſpace abſolu, & celle de la Comète different très-peu entr'elles, & ſont très-proches l'une de l'autre; il eſt aiſé de voir que l'altération $P\alpha - \zeta$, qui vient uniquement de l'action *précédente* des Planètes perturbatrices, ſeroit ſenſiblement la même dans l'orbite $\gamma\alpha\gamma'$ du Satellite & dans celle de la Comète. Soit $P = \varpi + p$, p étant $= o$ lorſque $z = \zeta$, & ϖ une conſtante, qui eſt la valeur de P' quand $z = \zeta$: & l'altération dont on vient de parler, ſera $(\varpi + p)\alpha - \zeta$.

4. Préſentement ſoit $z = \zeta + u$, u étant $= o$ lorſque $z = \zeta$, c'eſt-à-dire, au point γ, où l'on commence à conſidérer l'orbite du Satellite; & il eſt évident que l'altération du tems dans cette orbite, provenant de l'action des Planètes perturbatrices ſur le Satellite dans la partie d'orbite $\gamma\alpha\gamma'$, ſera $\int dp \int \xi\, du$, en nommant ξ les différentes valeurs de X' dans cette portion d'orbite; à quoi il faut ajouter l'altération déja trouvée $(\varpi + p)\alpha - \zeta$, pour avoir l'altération totale $(\varpi + p)\alpha - \zeta + \int dp \int \xi\, du = (\varpi + p)\alpha - \zeta + p\int \xi\, du - \int p\,\xi\, du$. Or il eſt facile de prouver que cette quantité eſt la même choſe que $P\int X' dz - \int P\,X'\,dz$; car $P\int X'\,dz - \int P\,X'\,dz = (\varpi + p)(\alpha + \int \xi\, du) - \zeta - \int \overline{\varpi + p}\,.\,\xi\, du = (\varpi + p)\alpha + p\int \xi\, du + \varpi\int \xi\, du - \int \varpi\,\xi\, du - \zeta - \int p\,\xi\, du = (\varpi + p)\alpha + p\int \xi\, du - \zeta - \int p\,\xi\, du$, à cauſe que ϖ étant conſtante, $\varpi\int \xi\, du - \int \varpi\,\xi\, du = o$. Donc &c.

5. Un ſavant Géometre a donné dans ſa *Théorie des Comètes*, une méthode ingénieuſe pour abréger le calcul

de la perturbation qui vient de l'action des Planètes ſur le Soleil. Cette méthode eſt telle, que la perturbation étant une fois calculée pour une révolution, elle le ſera pour une autre révolution quelconque. Mais 1°. la méthode ſuppoſe, comme ce Géometre le remarque, qu'on néglige l'excentricité & l'inclinaiſon de l'orbite de la Planète perturbatrice; ce qui ne peut être permis que dans certains cas. 2°. Dans la comparaiſon de deux révolutions ſucceſſives, cette méthode qui abrege extrêmement, & qui réduit preſque à rien le calcul de la perturbation de la ſeconde révolution, double le calcul de la premiere (*a*); ainſi le calcul n'eſt point réellement abrégé par cette méthode, lorſqu'on ne conſidere que deux révolutions ſucceſſives. Il eſt vrai qu'il le ſera beaucoup lorſqu'on calculera plus de deux révolutions; mais alors il faut non-ſeulement qu'on puiſſe négliger ſans crainte l'excentricité & l'inclinaiſon de la Planète perturbatrice, il faut de plus que dans toutes les révolutions on ſuppoſe à la Comète la même orbite elliptique primitive, & indépendante des perturbations; ce qui pourroit n'être pas ſans inconvénient dans certains cas, où les ellipſes primitives répondantes à chaque révolution, peuvent différer de pluſieurs années.

6. Nous avons enſeigné ci-deſſus (§. XX. n. 16.) à

(*a*) La raiſon pour laquelle ce calcul eſt doublé, vient de ce qu'au lieu de cos. ζ & ſin. ζ (§. IX.) on ſubſtitue cos. A cos. t — ſin. A ſin. t & ſin. A cos. t + cos. A ſin. t, A étant l'élongation au périhélie, & ζ étant $= A + t$.

trouver la *véritable Ellipſe primitive* de la Comète, lorſqu'on ſait par l'obſervation le tems de la révolution, & qu'on a trouvé par les calculs de la théorie l'altération de cette révolution. Pour trouver l'*Ellipſe primitive* de la révolution ſuivante, dans laquelle je ſuppoſe qu'on connoît déja par obſervation la ſituation & la diſtance périhélie, il ne s'agit que de ſavoir quel ſeroit le tems de la ſeconde révolution, indépendamment de l'action des Planètes perturbatrices pendant cette ſeconde révolution, & en vertu ſeulement de l'action des Planètes pendant la révolution précédente. Or ſoient P', R', V', les valeurs de P, R, V (§. XIX. n. 16.) lorſque $z = 360$ degrés ; & ſoient α, γ, δ, les valeurs de $\int X dz$ fin. z, $\int Y dz$, $\int Y dz$ ($1 -$ cof. z), à la fin de la premiere révolution; ſoit ſuppoſé de plus, comme dans le §. XIX, m le tems de la premiere révolution, lequel eſt connu par obſervation ; on aura pour le tems de la ſeconde révolution, indépendamment des perturbations pendant cette révolution, & en vertu ſeulement des perturbations de la précédente,

$$m + \frac{m\sqrt{S}}{S^{\frac{1}{2}} \cdot 6,283185} \left(P'\alpha + R'\gamma + \frac{2S \cdot R'\gamma}{g} - \frac{2S \cdot P'\delta}{g} \right).$$

Cette formule, qu'il eſt très-aiſé de ſe démontrer, ſi on a bien compris la théorie précédente, ſera d'autant plus facile à employer, que les différentes parties qui la compoſent ſe trouveront déja calculées (§. XXXVI.

n. 52.) dans les opérations qu'on aura faites pour trouver la perturbation de la premiere révolution.

7. Nous ne devons pas omettre ici une obſervation qui peut être de quelque conſidération dans le calcul des altérations du mouvement de la Comète. On a pris pour le tems de la révolution dans l'Ellipſe primitive, celui que les obſervations donnent depuis le paſſage au premier périhélie, juſqu'au retour au ſecond périhélie. Or les deux périhélies n'étant pas ſitués ſur la même ligne, il eſt évident que ce tems eſt un peu plus petit ou plus grand que celui de la révolution. C'eſt pourquoi, comme on ſuppoſe que l'angle entre les deux périhélies eſt connu, on calculera, dans l'hypothèſe Parabolique, le tems que la Comète mettroit à parcourir cet angle, & qui ne peut jamais être que de très-peu de jours tout au plus; & on ajoutera ou on retranchera ce tems de la quantité m, pour avoir celui que la Comète mettroit à faire une révolution entiere depuis ſon départ du premier périhélie, juſqu'à ce qu'elle revienne ſur la ligne du même périhélie. C'eſt cette quantité m ainſi corrigée qu'il ſera bon d'employer dans le calcul, au lieu de la quantité m, qui exprime le tems d'une révolution d'un périhélie à l'autre. Il ne ſera pas même néceſſaire d'employer cette correction dans toutes les parties du calcul, mais ſeulement dans celle qui donne le tems du retour de la Comète ſur la ligne du périhélie; c'eſt-à-dire, le tems qui répond à l'anomalie $z = 360°$.

8. La principale ſource d'erreur dans cette correction, viendra

viendra de la position du premier périhélie, qui peut être assez fautive, étant fondée sur des observations anciennes & grossieres, comme dans les Comètes de 1531 & 1532. A cet inconvénient, qui vient uniquement de l'incertitude des observations, je ne connois point d'autre remede, que d'en attendre de meilleures, & de calculer, comme par provision, d'après celles qu'on a, & qui sont les seules dont on puisse faire usage.

9. Au reste, je le répete encore en finissant ce Mémoire, la nature du Problême est telle, que les quantités négligées pourroient quelquefois occasionner de grandes erreurs dans le dernier résultat, sans qu'il fût possible au Calculateur d'y remédier: c'est pourquoi on ne doit jamais se fier à ce dernier résultat qu'avec beaucoup de réserve & de restriction; & on ne doit même jamais imputer au Calculateur l'erreur commise, avant que d'avoir prouvé par un calcul plus exact, qu'il pouvoit l'éviter.

En général, & toutes choses d'ailleurs égales, les calculs des altérations seront d'autant moins exacts, que les Elémens de la Comète seront moins exactement déterminés, & que sa période sera plus longue; & par cette raison je ne serois point étonné que la Comète de 1661 donnât deux mois, & peut-être plus, d'erreur dans le calcul de son retour; puisque la Comète de 1682, dont les Elémens sont mieux connus, & dont la période est beaucoup plus courte, a donné près d'un mois de différence entre le calcul & l'observation.

Fin du douziéme Mémoire.

TREIZIÉME MÉMOIRE.

Réflexions sur la Comète de 1682 & 1759.

CETTE Comète, dont le retour a été prédit par M. Halley, & calculé par M. Clairaut, a excité parmi les Savans quelques contestations. Nous allons en rendre compte, & donner en même tems le moyen de les décider.

I. M. Halley ne s'étoit pas contenté de prédire le retour de la Comète de 1682, qui avoit déja paru (comme ses calculs le démontrent) en 1531 & 1607: il annonça de plus qu'à cause de l'action de Jupiter, la période commencée en 1682 seroit plus longue que celle de 1607 à 1682, qui n'avoit été que de 75 ans; il prédit que la nouvelle période seroit allongée de plus d'une année par cette action, qu'elle seroit de plus de 76 ans; & il annonça le retour de la Comète pour la fin de 1758 ou le commencement de 1759. L'événement a vérifié sa prédiction avec une exactitude surprenante; la Comète a été vûe pour la premiere fois en Saxe, le 14 Décembre 1758 (vieux style); ce style est

celui qu'employoit M. Halley dans les calculs.

2. Un savant Géometre (qu'on dit être M. Dan. B.) pense (a) que dans cette prédiction, *M. Halley, de la maniere dont il s'énonce, ne s'est trompé que de trois mois*; & il ne paroît pas douter *que M. Halley n'eût déterminé encore plus exactement qu'il n'a fait le retour de la Comete, s'il avoit eu égard à l'action de Saturne.* Ce Géometre paroît donc croire que le calcul de M. Halley sur l'action de Jupiter, étoit suffisamment exact, & qu'il n'a laissé quelque latitude dans sa prédiction, que par rapport à l'action de Saturne. Pour nous, nous croyons que M. Halley en avoit encore une autre raison; c'est qu'il regardoit lui-même son calcul sur l'action de Jupiter, comme n'étant pas assez rigoureux, & n'ayant été fait, ainsi qu'il le dit, *levi calamo.*

3. Cependant on ne sauroit douter que M. Halley n'ait fait quelque essai de calcul sur l'action de Jupiter, puisqu'il a prévu & prédit que cette action retarderoit la Comete de plus d'un an; il seroit donc à souhaiter qu'il nous en eût donné plus précisément le résultat, & qu'il nous eût dit dans quel tems le calcul lui donnoit le périhélie. Car si le calcul de l'action de Jupiter lui a donné le périhélie à la fin de 1758, ou au commencement de 1759, on peut dire que ce calcul a été fort exact dans son résultat, puisque ce calcul ne différeroit de l'observation que d'environ trois mois, & que ces trois

(a) Voyez le *Journal Etranger* du mois de Janvier 1760, p. 78.

mois, ſuivant M. Clairaut, ſont l'effet de l'action de Saturne, que M. Halley n'a pas calculée. Si au contraire ſon calcul lui a donné le périhélie en Mars, par exemple, ou en Avril 1759, & que d'après ce réſultat il ait annoncé l'apparition de la Comète pour la fin de 1758, ou le commencement de 1759, comme elle a dû effectivement arriver dans cette ſuppoſition; en ce cas ſon calcul ſur l'action de Jupiter auroit à la vérité été en erreur de trois mois; mais par une circonſtance heureuſe, ce calcul ſe trouveroit d'accord avec l'obſervation, l'action de Saturne redreſſant l'erreur commiſe.

4. Quoi qu'il en ſoit, on ne peut refuſer à M. Halley la gloire d'avoir prédit le premier le retour de la Comète, & d'avoir de plus annoncé ſon retard, ſinon par un calcul éxact, au moins par un calcul dont le réſultat a été heureux. Mais on ne ſauroit diſſimuler en même tems, que ce calcul avoit beſoin d'être fait avec plus d'éxactitude, ſur-tout depuis qu'on eſt parvenu à trouver des méthodes pour cet objet.

5. Ce que M. Halley n'avoit pas fait, M. Clairaut l'a entrepris; la ſolution du Problême des trois corps, qu'il avoit trouvée conjointement avec M. Euler & moi, & qui eſt le ſeul moyen de calculer rigoureuſement l'action des Planètes les unes ſur les autres, l'a mis en état d'appliquer, ou faire appliquer les opérations arithmétiques à la formule qu'il avoit trouvée (conjointement avec nous) pour la ſolution de ce Problême: & au mois de Novembre 1758, plus de 76 ans après la derniere

apparition de la Comète, il annonça qu'en vertu de l'action de Jupiter & de Saturne, elle ne repasseroit à son périhélie que vers le 15 Avril 1759. Elle y a passé le 12 Mars; ce qui fait 33 jours de différence entre le calcul & l'observation.

6. Quelques Astronomes, en conséquence du calcul de M. Clairaut, se hâtèrent de dresser des Ephémérides du mouvement de la Comète, qui furent même lûes à l'Académie des Sciences. Mais le calcul de ces Ephémérides donnoit les lieux de la Comète à 40, 50 degrés, & au-delà, du lieu où elle étoit réellement. En conséquence les Astronomes qui avoient aidé M. Clairaut dans ses calculs, cherchant la Comète où elle n'étoit pas, ne la pouvoient trouver; il est vrai qu'ils avoient tort de s'en rapporter si servilement à ces calculs, puisque M. Clairaut lui-même avoit averti qu'il pouvoit bien s'être trompé d'un mois en excès ou en défaut.

7. La différence de plus d'un mois entre le calcul de M. Clairaut & l'observation, différence qui avoit empêché ces Astronomes d'appercevoir la Comète, a été l'objet d'une grande dispute parmi les Mathématiciens. Les uns ont prétendu que l'erreur étoit très-légere, attendu qu'elle devoit être comparée, non-seulement à la révolution totale qui est de 75 ou 76 ans, mais à la somme de deux révolutions consécutives, c'est-à-dire, à plus de 150 ans, ce qui ne fait pas la 1800e partie du tout. D'autres au contraire ont soutenu qu'il falloit comparer cette différence d'un mois, non à la somme, mais

à la ſeule différence des deux périodes conſécutives, laquelle eſt de 18 mois, & qu'ainſi l'erreur eſt au moins d'un dix-huitiéme ; il y en a même qui ont été plus loin, & qui ont fait monter cette erreur à un quart du total. Voyez le *Journal Encycl.* de Juillet 1759, Tome 2, p. 117. Je vais, ſi je ne me trompe, donner des principes bien ſimples pour décider cette conteſtation.

8. Pour déterminer la différence de deux périodes conſécutives de la Comète, qui eſt la ſeule choſe qu'on puiſſe déterminer dans ce Problême, voici comme on s'y prend.

9. On ſuppoſe que la Comète part de ſon périhélie de 1607 avec une certaine viteſſe, qui lui feroit décrire une ellipſe éxacte, ſans l'action de Jupiter & Saturne. En vertu de cette viteſſe, ſa période de 1607 à 1682 auroit été X, quantité qu'on ne connoît pas, qu'on ne ſauroit connoître, ni par conſéquent meſurer, & qu'il ſuffit d'avoir groſſiérement, c'eſt-à-dire, à un an près, ou même un peu moins éxactement, par les obſervations des retours de la Comète.

10. D'après cette ſuppoſition on calcule l'altération que les actions de Jupiter & de Saturne ont dû cauſer à la Comète ; & cette altération eſt ſenſiblement la même, quelque valeur qu'on ſuppoſe à X, pourvû que cette valeur ne ſoit pas fort différente de 75 ans & demi, ou 76 ans.

11. Soit α l'altération que les actions des deux Planètes cauſent à la révolution de la Comète ; on aura

$X + a$ pour la révolution réelle de la Comète, révolution inconnue, parce qu'elle renferme la quantité X, dont on n'eſt pas ſûr à un ou deux ans près.

12. La révolution ſuivante ſeroit $= X$, ainſi que la premiere, ſi pendant les deux révolutions le Soleil ſeul agiſſoit ſur la Comète : mais la même action des deux Planètes qui a altéré la premiere révolution de la quantité a, altere la ſeconde révolution d'une autre quantité C que l'on trouve également par le calcul ; de ſorte qu'on a $X + C$ pour la ſeconde révolution.

13. Cette quantité eſt inconnue, ainſi que la valeur $X + a$ de la premiere révolution, parce que X n'eſt pas aſſez éxactement connue ; mais en retranchant la premiere révolution $X + a$ de la ſeconde $X + C$, l'inconnue X diſparoît, & l'on a la différence $C - a$ des deux révolutions conſécutives, qu'on peut comparer à l'obſervation.

14. Par cet expoſé du calcul, il eſt aiſé, ce me ſemble, de démontrer, que *la différence du calcul à l'obſervation doit être comparée, non à la ſomme, mais à la différence des deux périodes conſécutives.* En effet ; 1°. on convient unanimement, & M. Clairaut l'a très-bien remarqué, que ſi on connoiſſoit éxactement par les obſervations la quantité X, l'erreur commiſe dans le calcul de la révolution devroit être uniquement comparée aux quantités a & C. Or que l'on connoiſſe ou non cette quantité X, l'erreur commiſe dans le calcul n'en doit pas moins être comparée uniquement aux quantités a & C ;

puiſque ces quantités α & ζ ſont abſolument indépendantes de la valeur préciſe de X, qu'on ne peut, ni connoître, ni meſurer, & que ces quantités α & ζ ſont, les ſeules qu'on meſure & qu'on calcule véritablement; l'erreur ne peut donc être comparée qu'aux ſeules quantités qu'on a calculées, c'eſt-à-dire, α & ζ. 2°. Non-ſeulement on n'a point calculé la quantité X, mais encore cette quantité, comme on vient de le voir (*art.* 13.) diſparoît entiérement du calcul quand on compare les deux révolutions; nouvelle raiſon pour n'y avoir aucun égard dans la comparaiſon du calcul avec l'obſervation. Il eſt donc inconteſtable que la différence d'un mois qui s'eſt trouvée entre le calcul & l'obſervation, doit être comparée uniquement à la différence des deux périodes, c'eſt-à-dire, à 18 mois; d'où il s'enſuit qu'elle eſt *au moins* $\frac{1}{18}$ du total; je dis *au moins*, car je ferai voir plus bas qu'elle eſt vraiſemblablement beaucoup plus grande.

15. M. Clairaut eſt venu lui-même à l'appui de ce raiſonnement (*a*); « la différence des deux périodes, » dit-il, eſt bien l'objet que je me ſuis propoſé de me» ſurer, mais il n'en étoit pas plus ſuſceptible de meſure » immédiate, il falloit toujours calculer les perturbations » de deux périodes. Pourquoi donc répandre l'erreur ſur » un autre eſpace *que ſur celui qu'il a fallu meſurer* »? De ce principe inconteſtable, il eſt aiſé de tirer la conſéquence; l'eſpace *qu'il a fallu meſurer*, n'eſt pas celui

(*a*) *Réponſe à quelques pièces*, &c. 1759.

des

des 151 ans qui font la ſomme des deux périodes; c'eſt uniquement l'*eſpace de tems* qui exprime l'*altération* de la premiere période, & celle de la ſeconde. Voilà le ſeul eſpace de tems qu'on ait calculé, le ſeul qu'on ait pû calculer, & par conſéquent le ſeul auquel on doive comparer l'erreur du calcul.

16. En un mot, pour comparer l'erreur d'un mois à 151 ans, il faudroit que les eſpaces de tems $X + \alpha$ & $X + \zeta$ (art. 13.) dont la ſomme fait environ 152 ans, euſſent été meſurés tout entiers: or ils ne l'ont point été; & la partie $2X$, qui eſt d'environ 151 ans, n'eſt ni meſurée, ni connue; on n'a calculé, encore une fois, que les ſeuls eſpaces de tems α & ζ, l'un & l'autre très-petits par rapport à ce nombre d'années.

Avant que d'aller plus loin, il ne ſera peut-être pas inutile de répondre à quelques objections faites par des perſonnes très-peu inſtruites dans cette matiere, & qu'il eſt bon d'éclairer. Un autre motif qui nous y engage, c'eſt que d'habiles Mathématiciens ont paru adopter ces objections; mais nous ne pouvons croire que ce ſoit ſérieuſement; & ce n'eſt pas proprement à eux que nous allons répondre.

17. On ſuppoſe, dit-on, qu'un Obſervateur meſure la diſtance de Paris à Saint-Denis, & la trouve de 4300 toiſes; que le même Obſervateur meſure enſuite la diſtance de Paris à Saint-Cloud, & la trouve de 4700 toiſes; il en conclura que la différence des deux diſtances eſt de 400 toiſes; ſi cette différence ſe trouvoit de 401 toiſes,

ſeroit-il équitable de dire que l'Obſervateur s'eſt trompé d'une toiſe ſur 400, lorſqu'au contraire il ne s'eſt trompé réellement que d'une toiſe ſur 9000 ?

18. La différence entre cet exemple & celui de la Comète eſt bien grande, & ſaute aux yeux. Dans l'exemple propoſé on meſure *en entier* la diſtance de Paris à Saint-Cloud, & celle de Paris à Saint-Denis. Dans le cas de la Comète, on ne meſure point en entier, à beaucoup près, chacune des deux périodes; on ne meſure qu'une très-petite partie de ces deux périodes, celle qui eſt dûe à l'altération.

19. Pour rendre la comparaiſon parfaitement juſte, voici comment il la faut faire. On ſuppoſe qu'il y ait entre Paris & Saint-Cloud un Village conſidérablement plus près de Saint-Cloud que de Paris, & dont on meſure la diſtance à Saint-Cloud, ſans connoître ni meſurer la diſtance de ce Village à Paris. On ſuppoſe de plus qu'au-delà de Saint-Denis par rapport à Paris, il y ait un autre Village, auſſi beaucoup plus près de Saint-Denis, que Saint-Denis ne l'eſt de Paris, & qu'on meſure la diſtance de ce Village à Saint-Denis, ſans meſurer ni connoître la diſtance du même Village à Paris. On ſuppoſe enfin que l'on ſache par quelque moyen indépendant de l'opération qu'on a faite, que les deux Villages dont il s'agit, ſont *à égale diſtance* de Paris, ſans qu'on connoiſſe éxactement cette diſtance; je dis 1°. qu'en meſurant les diſtances d'un des Villages à Saint-Cloud, & de l'autre à Saint-Denis, & en ajoutant ces diſtances, on aura la diffé-

rence des distances de Paris à Saint-Cloud, & de Paris à Saint-Denis. 2°. Que si les distances ajoutées donnoient, par exemple, 190 toises, & que la différence cherchée fût plus petite de 10 toises, on se seroit trompé de 10 toises sur 180, c'est-à-dire, de 1 sur 18.

20. Or voilà précisément le cas de la Comète. La distance inconnue de Paris aux deux Villages, mais qu'on sait être la même de part & d'autre, représente la longueur inconnue X dont chaque période auroit été par l'action seule du Soleil. Les quantités a & c qui sont les seules qu'on mesure, représentent les distances des deux Villages à Saint-Cloud & à Saint-Denis. Cette comparaison bien entendue, confirme donc tout ce qui a été dit jusqu'ici, bien loin d'y être contraire.

21. On objecte encore que les Astronomes & les Géometres qui ont construit des tables de la Lune, ont toujours comparé la différence qu'ils trouvoient entre le calcul & l'observation, non aux équations du mouvement de la Lune, mais à la révolution totale. S'ils l'ont fait, ils ont eu tort; car le mouvement vrai de la Lune est composé de deux parties; d'un mouvement moyen *uniquement donné par les observations*, & d'un certain nombre d'équations qui se déterminent par le calcul, & qui se retranchent du mouvement moyen, ou s'y ajoutent, pour avoir le mouvement vrai. Or ces équations étant la seule chose qu'on calcule & qu'on puisse calculer, sont par conséquent la seule à laquelle on doive comparer les erreurs du calcul; c'est pourquoi la somme des équa-

tions lunaires pouvant monter à environ 8 degrés, ſi l'erreur eſt, par exemple de 8′, elle ſera de 8′ ſur 8° ; c'eſt-à-dire, de $\frac{1}{60}$; & ſi la ſomme des équations n'étoit que de 2′, & que l'erreur fût de 1′, il ſeroit vrai de dire que l'erreur ſeroit de la moitié du tout, quoique cette erreur parût peu conſidérable en elle-même ; ce qui n'implique aucune contradiction, puiſque dans ce cas la différence du mouvement vrai au mouvement moyen ſeroit elle-même peu conſidérable, n'étant que de deux minutes, & que l'erreur, ſans être conſidérable en elle-même, le ſeroit par rapport à la quantité qu'on chercheroit.

22. Mais pour rendre d'ailleurs le cas de la Lune parfaitement ſemblable à celui de la Comète, il faut ſuppoſer qu'un Aſtronome cherche à déterminer la différence de deux révolutions ſucceſſives de la Lune ; or je dis que s'il détermine cette différence à 15 minutes d'heure, par exemple, & qu'elle ſoit de 14, ſon erreur aura été de 1′ ſur 14, c'eſt-à-dire, de $\frac{1}{14}$; parce que cette différence eſt la ſeule choſe qu'il ait meſurée & calculée, & que le mouvement moyen (commun aux deux révolutions de la Lune), non-ſeulement n'entre point dans le calcul, mais même en a diſparu, en retranchant la ſeconde révolution de la précédente.

23. En voilà, ce me ſemble, beaucoup plus qu'il n'eſt néceſſaire, pour prouver démonſtrativement que la différence d'un mois entre le calcul du retour de la Comète & l'obſervation de ce retour, ne doit pas être comparée à la révolution totale, & encore moins à la ſomme de

deux révolutions ſucceſſives, mais à la différence d'environ 18 mois, qui ſe trouve réellement entre ces deux révolutions.

24. Allons plus loin, & tâchons de prouver que cette différence eſt non-ſeulement $\frac{1}{15}$ du total, mais qu'elle eſt même vraiſemblablement bien plus conſidérable.

25. Pour cela ſuppoſons que y ſoit la quantité dont on s'eſt trompé en calculant l'altération α de la premiere révolution, cauſée par Jupiter ſeul; on aura donc pour la valeur éxacte de cette premiere révolution, en vertu de l'action de Jupiter, $X + \alpha + y$; ſuppoſons de même que ζ ſoit la quantité dont on s'eſt trompé en calculant l'altération ζ de la ſeconde révolution, cauſée par Jupiter ſeul; on aura cette ſeconde révolution $= X + \zeta + \zeta$; & la différence réelle des deux révolutions, en vertu de l'action ſeule de Jupiter $= \zeta + \zeta - \alpha - y$. M. Clairaut trouve de plus que la ſeconde période a dû être allongée par l'action de Saturne de 100 jours; quantité que j'appelle γ, & dans laquelle je ſuppoſe que l'erreur ſoit $+ z$; donc la différence réelle de la ſeconde révolution ſur la premiere eſt $\zeta + \zeta + \gamma + z - \alpha - y$: or cette différence eſt de 586 jours ſuivant l'obſervation; & ſuivant le calcul de M. Clairaut (a), on a $\zeta + \gamma - \alpha = 618$;

(a) Je donne ici le réſultat du calcul de M. Clairaut, tel qu'il ſe trouve dans ſon Mémoire de 1758, publié avant le retour de la Comète; Mémoire qui a donné lieu aux conteſtations que je me propoſe d'examiner dans cet Ecrit. Depuis le retour de la Comète, M. Clairaut a fait un calcul un peu plus éxact; mais il s'agit ici du premier calcul, de celui par lequel il a prédit le retour de la Comète; & d'ailleurs on peut appliquer

donc $\zeta + \chi - \gamma = -32$; de plus, ſuivant le même calcul, $\alpha = -420$; donc $\gamma + \zeta = 198$.

26. Il faut maintenant comparer les quantités ζ, χ & γ, aux quantités ζ, γ & α, trouvées par le calcul; & pour cela il faut tâcher de découvrir, au moins à-peu-près, la valeur de ces quantités ζ, χ & γ.

27. Or on voit d'abord que les quantités α & $\gamma + \zeta$ étant à-peu-près comme 2 à 1, la ſuppoſition la plus naturelle qu'on puiſſe faire, c'eſt de répandre à-peu-près dans la même proportion l'erreur $-32'$. ſur chacune de ces deux quantités. Suppoſons donc 22 jours d'erreur ſur $\alpha = -420$, & 10 ſur $\gamma + \zeta = 198 = 100 + 98$, enſorte que $\gamma = +22$, $\chi = -5$, & $\zeta = -5$; ce qui eſt la répartition la plus naturelle & *la plus favorable*; & voyons ce qui en réſultera pour l'erreur commiſe ſur la période de 1531 à 1607.

28. Soit ξ la valeur qu'auroit eûe la période de 1531 à 1607 par la ſeule action du Soleil, & δ l'altération cauſée à cette période par l'action de Jupiter (*a*); on aura par le calcul de M. Clairaut $\delta = -19$; de plus M. Clairaut trouve que la période ſuivante (celle qui commence à 1607) ſeroit abrégée de 31 jours par cette même

---

à ce ſecond calcul, *mutatis mutandis*, les raiſonnemens que nous allons faire ſur le premier.

(*a*) M. Clairaut trouve que les effets de l'action de Saturne ſe détruiſent à-peu-près dans les deux premieres périodes, & par cette raiſon n'en fait aucune mention dans ſon Mémoire de 1758. Nous n'en ferons pas mention non plus, & nous en dirons d'ailleurs plus bas une autre raiſon.

action de Jupiter depuis 1531 jusqu'en 1607; donc en nommant $\xi + \epsilon$ ce que la période de 1607 devroit être par l'action de Jupiter sur la période précédente, indépendamment de son action de 1607 à 1682, on aura $\epsilon = -31$. Enfin M. Clairaut trouve encore que cette période de 1607 à 1682, seroit accourcie de 420 jours, quantité que nous avons nommée α, ensorte que $\alpha = -420$. Donc $\epsilon + \alpha - \delta = -451 + 19 = -432'$.

29. Soit maintenant ν l'erreur commise dans δ, x l'erreur commise dans ϵ; on aura $\epsilon + x + \alpha + y - \delta - \nu = -459'$. différence réelle de la période de 1531 à celle de 1607. Donc $x + y - \nu = -27$ (a); donc si on suppose comme ci-dessus (art. 27.) $y = +22$, on aura $x - \nu = -49$, & par conséquent $\epsilon - \delta + x - \nu = -31 + 19 - 49 = -12 - 49$. Ainsi l'erreur de $49'$. commise sur $\epsilon - \delta = -12$, seroit plus que quadruple de cette quantité: ce qu'on ne sauroit guères supposer; car il faudroit pour cela (même dans la combinaison la plus favorable) qu'on se fût trompé sur chacun des nombres trouvés 31 & 19, d'une quantité égale à chacun de ces nombres; ce qui détruiroit toute espéce de confiance dans le résultat de ce calcul.

30. De-là on peut conclure que y est beaucoup plus

(a) M. Clairaut trouve dans son Mémoire de 1758, que la différence est de 37 jours; en quoi il s'est trompé à son désavantage, n'ayant pas fait attention au retranchement de 10 jours qu'il faut faire de 1531 à 1607, suivant le nouveau style.

petit que + 22, & vraiſemblablement même eſt négatif, ainſi qu'on le va voir. Comme les quantités ϵ, δ, dépendent des obſervations de 1531 qui ſont peu éxactes, ſuppoſons que dans chacune de ces quantités ϵ, δ, on ſe ſoit trompé de la moitié; ce qui donne dans la combinaiſon la plus favorable, $x = -15$, $\nu = 9$: cette ſuppoſition eſt d'autant moins choquante, que dans un calcul fait poſtérieurement, M. Clairaut a trouvé la quantité $\delta = -8$, après l'avoir trouvée d'abord $= -19$, ce qui donneroit $\delta + \nu = -8$, & $y = -8 + 19 = 11$; ainſi l'erreur du premier calcul de la quantité δ, en ſuppoſant le ſecond calcul à peu-près éxact, auroit été de plus de la moitié du total. On aura donc $x + y - \nu = -24 + y = -27$; & $y = -3$ (a).

31. Donc puiſque $\zeta + z - y = -32$, on aura $\zeta + z = -35$. Donc la vraie valeur de $\gamma + 6$ ſera tout au plus $198 - 35 = 163$; donc l'erreur commiſe ſur $\gamma + 6$ ſeroit au moins de 35 ſur 163, c'eſt-à-dire, de plus d'un cinquiéme.

32. Si on ſuppoſe les erreurs x, ν plus petites que de la moitié du total, ou même égales à cette moitié, mais

(a) Cette erreur $y = -3$ pourra paroître aſſez petite par rapport à la quantité $\alpha = -420$; mais il faut, ou adopter cette concluſion, ou ſuppoſer que l'erreur commiſe dans les derniers réſultats du calcul ($\epsilon = -31$, & $\delta = -19$) eſt égale ou à-peu-près égale à chacun de ces réſultats mêmes; enſorte que ϵ au lieu d'être -31, auroit dû être environ -60, & que δ au lieu d'être -19, auroit dû être à-peu-près $= 0$; or de pareilles erreurs dans les quantités qu'on cherche, m'ont paru trop conſidérables pour les ſuppoſer.

d'un

d'un autre ſigne, alors l'erreur $\zeta + \zeta$ ſeroit beaucoup plus conſidérable, & pourroit aller à la moitié du tout, ou au-delà. Il n'eſt donc pas ſurprenant que quelques Mathématiciens ayent trouvé l'erreur égale à $\frac{1}{4}$ du total. C'eſt qu'ils ſuppoſoient les erreurs x, v, plus petites que de la moitié des quantités auxquelles elles ſe rapportent; ſuppoſition qu'il étoit aſſez naturel de faire. La nature de la queſtion préſente eſt telle, que quand on diminue les erreurs dans un ſens, elles augmentent dans un autre.

33. J'ai ſuppoſé ici avec M. Clairaut dans ſon Mémoire de 1758, $\delta = -19$, parce qu'encore une fois, c'eſt de ce Mémoire ſeul qu'il s'agit ici. Dans *ſa Théorie des Comètes*, il trouve δ plus petit de la moitié, & $= -8$; donc $\varepsilon + \alpha - \delta = -443$; donc $x + y - v = -16$. Ainſi 1°. en n'ayant égard qu'à l'action de Jupiter, l'erreur dans la différence des deux premieres périodes, ne ſeroit que de 16 jours. 2°. M. Clairaut trouve qu'en ayant égard de plus à l'action de Saturne, l'erreur ſeroit de 33 jours (*a*). La conſidération de l'action de Saturne ſur les

(*a*) M. Clairaut dit dans *ſa Théorie des Comètes*, qu'en négligeant l'action de Saturne ſur les deux premieres périodes, il avoit d'abord trouvé une erreur de 37 jours, & que cette erreur s'eſt réduite à 33 en ayant égard à l'action de Saturne, & en rectifiant quelques erreurs de calcul qui s'étoient gliſſées dans les autres opérations. Il devoit dire (V. la Note ſur l'art 29.) que l'erreur, qui n'étoit d'abord que de 27 jours (& non de 37) en négligeant l'action de Saturne, & qui même n'eſt proprement que de 16 jours, s'eſt trouvée enſuite de 33 jours, en ayant égard à cette action. Ainſi plus de ſcrupule dans les opérations n'a fait ici qu'augmenter l'erreur; c'eſt ce qui eſt encore arrivé à ce ſavant Géometre dans d'autres occaſions; comme on le

deux premieres périodes, ne fait donc ici que multiplier l'erreur, & par conſéquent on peut avec juſtice faire abſtraction de ce calcul, & regarder l'effet de l'action de Saturne comme nul dans les deux premieres périodes.

34. La ſuppoſition de $x+y-v=-16$, donneroit (en faiſant toujours $y=22$) $x-v=-38$, & par conſéquent $t-\delta+x-v=-31+8-38=-23-38$. Et l'erreur -38 commiſe ſur $t-\delta$ ſeroit encore trop forte; puiſqu'il faudroit qu'on ſe fût trompé de la valeur entiere de chacune des quantités t, δ. En corrigeant l'erreur par la ſuppoſition de $x=\frac{a}{2}$; $v=-\frac{\delta}{2}$, c'eſt-à-dire, $x=-15$, $v=4$, on auroit $y=+3$, & $\zeta+z=-29$. Ainſi l'erreur ſeroit encore de 29 ſur 169, c'eſt-à-dire d'environ $\frac{1}{5}$. Au reſte je ne fais cette remarque qu'en paſſant, parce qu'il n'eſt point queſtion ici des réſultats que trouve M. Clairaut dans ſa *Théorie des Comètes*, mais de ceux qu'il a annoncés dans ſon Mémoire de 1758, & qui ont été l'objet de la conteſtation. Or on a vû (art. 31.) que l'erreur dans le dernier réſultat eſt vraiſemblablement de plus de $\frac{1}{5}$.

35. Donc en faiſant la répartition la plus vraiſemblable

peut voir p. 229 de ſa *Théorie des Comètes*. Que faut-il conclure de-là? Rien autre choſe, ſinon que le Problême des perturbations des Comètes n'eſt pas ſuſceptible *par ſa nature* d'un certain degré de préciſion dans ſa ſolution; & c'eſt uniquement ce que je me propoſe de faire voir dans cet Ecrit, ſans prétendre d'ailleurs attaquer les calculs de M. Clairaut, dont on ne ſauroit trop louer le courage & la patience.

& la plus favorable des erreurs commiſes dans les différens réſultats, la différence de 32 jours entre le réſultat du calcul & l'obſervation du périhélie de 1759, ſuppoſe une erreur de plus de $\frac{1}{7}$ dans le calcul de la quantité $y+c$.

36. Quelque conſidérable que paroiſſe cette erreur, il ſeroit néanmoins injuſte de l'imputer à M. Clairaut, puiſqu'il a reconnu lui-même dans ſon Mémoire de 1758, que ſon calcul pourroit bien différer d'un mois d'avec l'obſervation. Or cette différence d'un mois décompoſée & analyſée de la maniere la plus vraiſemblable, ſuppoſe une erreur de $\frac{1}{7}$, & au-delà, ſur le dernier réſultat, ainſi que nous l'avons fait voir; & tout Calculateur qui prévoit & annonce la quantité dont il peut s'être trompé, ne doit point être chargé de cette erreur, quelque conſidérable qu'elle puiſſe être.

37. Il eſt vrai que dans un Ecrit poſtérieur, cet habile Mathématicien ſemble attribuer la différence ſuſdite (au moins en grande partie) aux erreurs des obſervations antérieures, à l'action des autres Planètes & de leurs Satellites, à celle des Comètes, & à la réſiſtance de l'éther. Mais il ne paroît pas que ces différentes cauſes puiſſent altérer beaucoup les révolutions de la Comète. M. Clairaut convient lui-même dans ſon Mémoire de 1758, que l'action des autres Planètes *ne produit qu'un effet preſque inſenſible*; & à l'égard de l'action des autres Comètes, ou même de quelque Planète trop diſtante du Soleil pour être jamais apperçûe, il convient auſſi

qu'il paroît peu vraiſemblable que de telles cauſes de dérangemens ayent eu lieu. Enfin la réſiſtance de l'éther, dont M. Clairaut n'avoit point parlé dans ſon Mémoire de 1758, paroît ne devoir produire ici qu'un effet preſque inſenſible. Car comment concevoir que cette réſiſtance, qui n'altere pas ſenſiblement un grand nombre de révolutions ſucceſſives des Planètes, rende chaque révolution de la Comète plus courte d'environ un mois dans l'eſpace de 75 ans?

38. Ajoutons, que quelles que ſoient les différentes cauſes, négligées dans le calcul, qui peuvent altérer le mouvement de la Comète, M. Clairaut les a ſéparées entiérement (& ce me ſemble avec raiſon) dans ſon Mémoire de 1758, des cauſes d'erreur qui viennent des quantités négligées dans le calcul de l'action de Jupiter & de Saturne; car il s'exprime ainſi à la fin de ſon Mémoire, après avoir annoncé le retour de la Comète pour le 15 Avril 1759. » On ſent avec quels ménagemens je » préſente une telle annonce, *puiſque tant de petites quantités négligées néceſſairement par les méthodes d'approximation pourroient bien en altérer le terme d'un mois.... puiſque* d'ailleurs *tant de cauſes inconnues, ainſi que je l'ai dit au commencement de ce Mémoire, peuvent avoir agi ſur notre Comète.* Ces cauſes inconnues (les ſeules dont M. Clairaut ait parlé dans ſon Mémoire de 1758) ſont l'action des autres Planètes & de leurs Satellites; le mot *d'ailleurs* fait voir que M. Clairaut ne penſoit point alors à leur attribuer la différence d'un mois qui

pouvoit ſe trouver entre ſon calcul & l'obſervation, mais uniquement aux quantités négligées dans le calcul; & je n'imagine pas non plus qu'il regarde la réſiſtance de l'éther comme une cauſe qui puiſſe influer fort ſenſiblement dans l'altération du mouvement des Comètes, ſur-tout dans celle de la Comète de 1682.

39. De toute cette diſcuſſion, il s'enſuit 1°. qu'on peut attribuer aux ſeules quantités qu'on eſt forcé de négliger dans le calcul de l'action de Jupiter & de Saturne, la différence d'un mois qui s'eſt trouvée entre le calcul & l'obſervation; 2°. que cette différence doit être comparée, non à la révolution entiere de la Comète, ni à plus forte raiſon à la ſomme de deux révolutions ſucceſſives, mais à la différence de 18 mois qui ſe trouve entre les deux dernieres périodes; & qu'ainſi l'erreur eſt au moins de $\frac{1}{18}$, & non pas de $\frac{1}{900}$, ni de $\frac{1}{1800}$, comme l'ont prétendu quelques Ecrivains peu inſtruits. 3°. Qu'en examinant quelles peuvent être les erreurs les plus vraiſemblables des différentes parties du calcul, on trouve que l'erreur commiſe ſur l'altération de la derniere période, peut être $\frac{1}{5}$ de cette altération. 4°. Que cette erreur, quelque conſidérable qu'elle ſoit, doit être imputée uniquement à la nature du Problême; puiſque d'une part il n'eſt peut-être pas poſſible (ſans s'engager dans des calculs impraticables) de déterminer l'altération plus exactement; & puiſque d'un autre côté on doit ſe propoſer dans ces ſortes de calculs, non de prédire exactement le retour d'une Comète, de maniere qu'on puiſſe

avoir ſon lieu dans le Ciel, à 30, 40 & 50 degrés près, mais ſeulement de prouver, que par la Théorie de la gravitation, l'action de Jupiter & de Saturne doit altérer conſidérablement le cours de ces Aſtres; & c'eſt ce que M. Clairaut a ſuffiſamment prouvé par ſon travail.

40. Voilà mon ſentiment ſur cette diſpute; ſentiment que pluſieurs Savans m'ont engagé à mettre par écrit, & qui ne peut, ce me ſemble, offenſer perſonne, ni par lui-même, ni par la maniere dont j'ai tâché de l'expoſer. Quoique ce Mémoire ſoit fait il y a long-tems, j'ai différé juſqu'à préſent à le mettre au jour, parce qu'il m'a paru à propos d'attendre un tems où perſonne ne prendroit plus guères d'intérêt à cette queſtion, que celui de la vérité. Peut-être même n'aurois-je point communiqué aux Géometres ces réfléxions, ſi la méthode dont je me ſers pour déterminer d'une maniere vraiſemblable les erreurs du calcul dans la théorie des perturbations des Comètes, n'étoit, ce me ſemble, fondée ſur des conſidérations aſſez délicates, qui peuvent la rendre curieuſe par elle-même, & utile dans d'autres occaſions.

Fin du treiziéme Mémoire.

QUATORZIÉME MÉMOIRE.

Réfléxions ſur le Problême des trois Corps, avec de nouvelles Tables de la Lune, d'un uſage très-ſimple & très-facile.

I.

J'AI publié dans mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, imprimées en 1754, des Tables de la Lune, telles que la théorie me les avoit données. J'avois cru devoir conſerver dans ces Tables la forme de celles des *Inſtitutions Aſtronomiques*, parce que les Aſtronomes me paroiſſoient accoutumés à cette forme, & parce que d'ailleurs cette forme me ſembloit avoir quelques autres avantages, dont j'ai fait mention p. 249 & 250 de la premiere Partie des *Recherches* déja citées.

II.

Ayant fait réfléxion depuis, qu'il ſeroit très-commode & très-utile aux Aſtronomes d'avoir des Tables particulieres qui marquaſſent ſeulement la différence des miennes d'avec celles des *Inſtitutions*, j'ai publié ces Tables

de correction au commencement de 1756; & je me proposois d'en faire usage, pour m'assurer de combien la théorie s'écartoit des observations, & pour rectifier par les observations ces mêmes Tables de correction, qui étant ensuite réunies & comme incorporées dans les Tables des *Institutions Astronomiques*, auroient vraisemblablement donné les lieux de la Lune aussi éxactement qu'on auroit pû le desirer.

III.

Mais d'autres occupations m'ayant empêché de suivre ce travail, je n'ai pû tirer de ces Tables de correction tout le parti que j'aurois desiré. Cependant elles ne m'ont pas été tout-à-fait inutiles. Car comme j'avois indiqué les cas où il falloit les comparer aux observations pour juger de leur éxactitude, quelques Astronomes ayant bien voulu prendre la peine de les calculer dans quelques-uns de ces cas, ont cru s'appercevoir que j'avois fait la *variation* trop petite, & l'*évection* trop grande; ce qui ne m'a point paru surprenant, malgré le soin & la patience que j'avois mis à calculer en particulier la valeur de ces deux équations; car j'ai toujours été persuadé, & je le suis encore, que l'on ne peut jamais être assuré *à priori* d'avoir assigné à une minute près, ou même davantage, les coëfficiens de chacune des équations de la Lune. J'en ai dit ailleurs les raisons plus en détail.

IV.

Il étoit donc nécessaire en conséquence, de réformer ces

ces deux équations dans mes Tables de correction. D'un autre côté je remarquois des différences assez considérables entre mes Tables & celles de M. Mayer, qui jusqu'ici ont paru les plus éxactes, pour me faire naître des soupçons sur l'éxactitude des miennes; enfin je ne pouvois me dissimuler que la forme des Tables de M. Mayer étoit de toutes la plus commode & la plus expéditive. Ces considérations m'ont engagé à calculer de nouvelles Tables de la Lune, auxquelles j'ai donné en partie cette derniere forme, en la simplifiant encore. Ces Tables seront beaucoup plus éxactes que celles que j'ai publiées précédemment, & seront d'ailleurs d'un calcul aussi court qu'on puisse le desirer.

V.

1. Mais avant que d'entrer dans le détail de mes nouveaux calculs, je crois devoir faire quelques réfléxions sur la solution que j'ai donnée du Problême des trois Corps, & en montrer les avantages. Cette discussion est d'autant plus nécessaire, qu'il me paroît très-essentiel de rendre sur cette matiere à chacun la justice qui lui appartient. Quoiqu'on ait affecté, ce me semble, de déprimer mon travail sur ce sujet, je me flatte que les Géometres en jugeront autrement, quand ils auront lû les réfléxions suivantes, qui pourront être utiles à l'Histoire de ce fameux Problême, & qui renferment d'ailleurs des discussions délicates, dont l'Analyse pourra tirer quelque fruit.

2. Le Problême des trois Corps, entant qu'il eſt applicable au mouvement des Planètes, ſe réduit, comme Mrs Euler, Clairaut & moi l'avons remarqué, à trouver, au moins par une méthode d'approximation, l'orbite d'une Planète qui eſt attirée vers le Soleil en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, & qui eſt en même tems troublée par deux forces φ & π, très-petites par rapport à la gravitation, & dont la premiere φ eſt dans la direction du rayon vecteur, & la ſeconde π perpendiculaire à ce rayon.

3. Pour déterminer cette orbite, il faut remplir deux objets; 1°. trouver l'équation différentielle; 2°. intégrer cette équation.

4. Quant au premier objet, je crois y être arrivé par une méthode beaucoup plus ſimple qu'aucun des Géometres qui ont réſolu la même queſtion.

5. Cette méthode conſiſte à prendre d'abord l'équation de l'orbite, en la ſuppoſant décrite par une force Q qui tende toujours vers le centre commun des rayons vecteurs; cette équation, comme le ſavent tous les Géometres, eſt $dz = \frac{-dx}{xx\sqrt{\frac{1}{hh} - \frac{2\int Q\,dx}{ggkk} - \frac{1}{xx}}}$; laquelle en faiſant $\frac{1}{x} = u$, & en différentiant, ſe change en $ddu + udz^2 - \frac{Q\,dz^2}{kkuugg} = 0$.

6. Dans l'orbite ainſi décrite, l'Elément du tems ſeroit

$\frac{s \times d\zeta}{gh}$, c'eſt-à-dire, proportionnel au ſecteur; mais dans cette même orbite décrite en vertu des forces Ψ & π, dont l'une eſt ſuppoſée dans la direction du rayon vecteur, & l'autre perpendiculaire à ce rayon, l'Elément du tems ſeroit $\frac{q \times s \, d\zeta}{gh}$, q étant une inconnue que nous déterminerons dans un moment. Dans cette derniere orbite décrite en vertu des forces Ψ & π, la force qui agit ſuivant le rayon vecteur, eſt $\Psi + \frac{\pi \, dx}{s \, d\zeta}$, comme il eſt aiſé de s'en aſſurer par une décompoſition très-ſimple de la force π: de plus cette force $\Psi + \frac{\pi \, dx}{s \, d\zeta}$ faiſant parcourir la même petite ligne parallèle au rayon vecteur, qui eſt parcourue en vertu de la force Q, il s'enſuit que la force $\Psi + \frac{\pi \, dx}{s \, d\zeta}$ eſt à la force Q, par les principes de Méchanique, en raiſon inverſe des quarrés des tems, c'eſt-à-dire, comme 1 eſt à q^2; donc $Q = \left(\Psi + \frac{\pi \, dx}{s \, d\zeta}\right) q^2$; or on trouve par un calcul fort ſimple que $q^2 = \left(1 - \frac{ds}{v \times s \, d\zeta} \int \frac{\pi \times ds}{v}\right)^2$, ou $q^2 = \frac{1}{1 + 2 \int \frac{\pi \, s^2 \, d\zeta}{g^2 h^2}}$ (a); donc l'équation de

(a) Cette ſeconde équation ſe tire de l'équation $d(s \times d\zeta) = \pi \times dt^2$, qui donne en multipliant par $s \times d\zeta$, l'intégrale $\frac{(s \times d\zeta)^2}{2} =$

l'orbite ſera $d\,du + u\,dz^2 - \frac{dz^2}{uuggkk} \times q^2 \left(\Psi - \frac{\pi\,du}{u\,dz}\right) = 0$, dans laquelle on peut mettre indifféremment pour q^2, une des deux valeurs trouvées ci-deſſus.

7. On voit donc que j'arrive à cette équation par la méthode & le calcul du monde le plus facile, en ſubſtituant dans la formule (très-connue & très-uſitée) des trajectoires décrites par une ſeule force centrale, à la place de Q ſa valeur, qu'une ſimple Analogie m'a fournie; & que je n'ai pas beſoin des transformations & des ſubſtitutions épineuſes que d'autres Géometres ont em-

---

$dt^2 \int \pi\, x^3\, dz + \frac{dt^2 \cdot g^2 h^2}{2}$. Voyez *Rech. ſur le Syſtême du Monde*, I. Partie, p. 14. On peut encore conſidérer que dt, ou $\frac{ds}{v} = \frac{x\,x\,dz}{gh} - \frac{ds}{vgh} \int \frac{\pi\, x\, ds}{v}$, comme je l'ai trouvé dans mon Mémoire de 1745; ce qui donne $q = 1 - \frac{ds}{v\,x\,x\,dz} \int \frac{\pi\, x\, ds}{v}$ expreſſion qui revient abſolument au même que $q = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\int \frac{\pi\, x^3\, dz}{ggkk}}}$ comme il eſt aiſé de s'en aſſurer; car $\left(1 + 2\int \frac{\pi\, x^3\, dz}{ggkk}\right)^{-\frac{1}{2}}$ réduit en ſerie, donnera préciſément la même formule que $1 - \frac{ds}{v\,x\,x\,dz} \int \frac{\pi\, x\, ds}{v}$, en mettant pour $\frac{ds}{v}$, 1°. ſa valeur primitive $\frac{x\,x\,dz}{gh}$; 2°. ſa valeur corrigée $\frac{x\,x\,dz}{gh}\left(1 - \int \frac{\pi\, x^3\, dz}{g^2 h^2}\right)$; & ainſi de ſuite.

ployées pour parvenir à la même équation.

VI.

1. A l'égard de l'intégration de cette équation, je ne ſai pourquoi un très-ſavant Mathématicien l'a appellée une *intégration délicate & neuve*; car dès 1740 (ſept ans avant qu'il fût queſtion du Problême des trois Corps), M. Euler avoit donné dans ſa Piéce ſur le *Flux & Reflux de la Mer*, p. 301 & ſuiv. une méthode pour intégrer les équations de cette forme $ddu + Kudz^2 + \Sigma dz^2 = o$, K étant une conſtante quelconque, & Σ une fonction quelconque de z. Cette méthode, que M. Euler explique aſſez au long, & que j'ai depuis dévelopée & un peu ſimplifiée (ce qui étoit très-facile) dans l'art. 101 de la premiere Edition de mon *Traité de Dynamique*, imprimé en 1743 (quatre ans avant aucune ſolution connue du Problême des trois Corps) eſt analogue à celle dont M. Bernoulli s'eſt ſervi en 1697, pour intégrer les équations de cette forme $du + Kud\zeta + \Sigma d\zeta = o$. Elle conſiſte à prendre $u =$ au produit de deux indéterminées; on la peut voir miſe en uſage, p. 131 de la ſeconde Partie de mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, où elle eſt appliquée à l'intégration même de l'équation différentielle du Problême des trois Corps.

2. La méthode, par laquelle le ſavant Mathématicien déja cité a intégré cette équation, ſe déduit aiſément de cette méthode des indéterminées, qui eſt même plus analytique; car la méthode des indéterminées fait trouver

directement la quantité cos. ζ, par laquelle le savant Mathématicien multiplie l'équation avant que de l'intégrer. Cette multiplication semble supposer qu'on connoissoit déja l'intégrale par une autre méthode plus directe, dont on a ensuite abrégé tant soit peu le calcul, en multipliant les différentielles avant l'intégration, par les quantités que la méthode des indéterminées a fait trouver.

3. En effet, suivant la méthode donnée en 1743, dans mon *Traité de Dynamique*, soit $x = s\,q$; on trouve $s\,ddq + 2\,ds\,dq + q\,dds + s\,q\,d\zeta^2 + \Sigma\,d\zeta^2 = 0$; & faisant (comme je l'ai prescrit dans l'endroit cité) $s\,ddq + s\,q\,d\zeta^2 = 0$, ou $aq = \text{cos. } \zeta$, & $2\,ds\,dq + q\,dds + \Sigma\,d\zeta^2 = 0$, ou $d(qq\,ds) + \Sigma\,q\,d\zeta^2 = 0$; ou mettant pour s sa valeur $\frac{u}{q} = \frac{u}{\text{cos. } \zeta}$ $d\left(\frac{\text{cos. } \zeta^2\,du}{\text{cos. } \zeta} + u\,d\zeta\,\text{sin. } \zeta\right) + \Sigma\,q\,d\zeta^2 = 0$, ou $ddu\,\text{cos. } \zeta + u\,d\zeta^2\,\text{cos. } \zeta + \Sigma\,d\zeta^2\,\text{cos. } \zeta = 0$; ce qui prouve qu'il faut multiplier l'équation par cos. ζ pour la rendre intégrable, & pour avoir l'intégrale $du\,\text{cos. } \zeta + u\,d\zeta\,\text{sin. } \zeta + d\zeta \int \Sigma\,d\zeta\,\text{cos. } \zeta = \text{const.}$

4. Au reste, soit que les Géomètres, qui ont eu recours à cette préparation, l'ayent trouvée par la méthode des indéterminées ou autrement, il est au moins certain que M. Euler, & moi après lui, sommes les premiers qui ayons donné des méthodes pour l'intégration de ces sortes d'équations, plusieurs années avant qu'on en eût prévu l'usage par rapport au Problême des trois Corps

Cela eſt ſi vrai, que M. Euler, dans ſes Opuſcules imprimées à Berlin en 1746, p. 260, cherchant la quantité P, qu'il faut ajouter à u dans l'hypothèſe de la réſiſtance du milieu, trouve cette équation $dd\,P + P\,dz^2 = \frac{s\,dz^2}{c\,g}$, qui eſt préciſément ſemblable à celle du Problême des trois Corps; & il ajoute, *quæ ſi methodo alibi expoſitâ integretur, dabit* $P = \frac{\text{ſin. } t}{c\,g} \int s\,dt \cos. t - \frac{\cos. t}{c\,g} \int s\,dt \text{ ſin. } t$; réſultat qui eſt préciſément ſemblable à celui que le ſavant Mathématicien déja cité a donné depuis, & qu'il regarde, on ne voit pas pourquoi, comme le caractere diſtinctif de ſa ſolution, qui la rend, ſelon lui, ſupérieure à toutes les autres.

Il eſt donc inconteſtable; 1°. qu'on avoit long-tems avant 1747, des méthodes pour intégrer l'équation $dd\,u + u\,dz^2 + \Sigma\,dz^2 = 0$; 2°. qu'on avoit la formule même qui exprime l'intégrale de cette équation; & que ceux qui l'ont intégrée depuis, n'ont rien ajouté à cet égard à ce que les Géometres ſavoient.

VII.

1. J'ai donné, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin de 1748 & 1750, une méthode générale pour intégrer des équations beaucoup plus compliquées que l'équation $dd\,u + u\,dz^2 + \Sigma\,dz^2 = 0$, & dont elle n'eſt qu'un cas très ſimple. Cette méthode, qui dans les Mémoires de Berlin de 1748, eſt datée du 13 Avril 1747,

& qui par conſéquent eſt encore antérieure à toutes les ſolutions du Problême des trois Corps, eſt celle dont je me ſuis ſervi la même année 1747, pour intégrer l'équation $ddu + u\,dz^2 + \Sigma\,dz^2$, relative au Problême des trois Corps.

2. Ce qui m'a déterminé à faire uſage dans cette ſolution, des expoſans imaginaires (dont j'aurois pû me paſſer, puiſque dès 1743 j'avois intégré de pareilles équations ſans employer ces expoſans); c'eſt que l'uſage de ces expoſans imaginaires diſpenſe de ſe ſouvenir des formules des ſinus & des coſinus multipliés entr'eux, deſquelles on a beſoin dans la théorie des perturbations des Planètes. D'ailleurs la ſolution que j'ai employée, & où ſe trouvent ces expoſans imaginaires, a l'avantage de pouvoir être appliquée à un grand nombre d'autres équations différentielles, plus compliquées que celle à laquelle ſe réduit le Problême des trois Corps. Enfin les expoſans imaginaires ne cauſent aucun inconvénient dans le réſultat de la ſolution, puiſque j'ai donné les moyens de faire diſparoître ces expoſans, ſi on le juge à propos (*a*). En un mot, qu'on ſe ſerve des expoſans imaginaires ou non, on parviendra toujours dans tous les cas à la même formule.

VIII.

1. Un des deux Mathématiciens qui ont donné dans

(*a*) Voyez là-deſſus mon Mémoire *ſur la Théorie des Comètes*, §. V. Il eſt imprimé dans ce Volume.

le

le même tems que moi, la ſolution du Problême des trois Corps, regarde comme un avantage particulier à ſa ſolution (& qui la rend, ſelon lui, préférable à la mienne & à celle de M. Euler), celui de donner l'intégrale de l'orbite ſous une forme telle, qu'elle renferme *deux parties*; dont l'une eſt l'équation de l'orbite non troublée, & l'autre exprime les dérangemens cauſés à cette orbite par les forces perturbatrices. Comme cette aſſertion attaque ma ſolution, & tend à la déprimer, je me crois obligé d'y répondre.

J'obſerve d'abord, que quand il s'agit de l'orbite des Comètes, où le terme $u\,d\,z^2$ reſte *néceſſairement* ſans coëfficient, l'intégrale contiendra *néceſſairement ces deux parties*. Car les trois premiers termes de l'équation différentielle ſeront alors, comme je l'ai expreſſément remarqué dans mon Mémoire de 1745, art. XVII. (& comme je l'ai rappellé ci-deſſus, §. IV & VI. de ma *Théorie des Comètes*) $d\,d\,u + u\,d\,z^2 - F\,d\,z^2 = 0$; or ces trois premiers termes ſont l'équation différentielle de l'orbite non troublée, & par conſéquent l'intégrale contiendra *néceſſairement* deux parties; dont l'une repréſentera l'équation de cette orbite non troublée; & l'autre, les dérangemens qui y ſont produits par l'action des forces perturbatrices.

2. La méthode du ſavant Mathématicien dont nous venons de parler, n'a donc encore à cet égard aucun avantage, & ne peut même en avoir, puiſque la ſéparation de l'intégrale en deux parties, eſt une ſuite *néceſſaire*

de l'intégration dans le cas de l'orbite des Comètes, où le terme $u\,dz^2$ ne sauroit avoir d'autre coëfficient que l'unité. Mais je vais plus loin, & je me propose de faire voir que dans le cas de l'orbite des Planètes, cette disposition de l'intégrale a plusieurs inconvéniens considérables.

IX.

1. Ces inconvéniens, que je vais détailler, viennent en général de ce que cet habile Géometre a laissé mal-à-propos, *dans le cas de l'orbite des Planètes*, l'équation différentielle de l'orbite sous la forme $ddu + u\,dz^2 + \Sigma\,dz^i = 0$. En conséquence l'équation intégrée contient un coëfficient de cette forme $A\cos.\,z$; or si ce coëfficient se trouvoit dans la valeur du rayon vecteur, il en résulteroit dans la formule intégrale donnée par ce Géometre, des termes affectés d'arcs de cercle, qui rendroient la solution fautive. Pour éviter cet inconvénient, l'habile & adroit Analyste a recours à la méthode des indéterminées; il suppose le rayon de l'orbite égal à une formule dont les coëfficiens sont inconnus, & dans laquelle il a soin que $\cos.\,z$ ne se trouve pas; ensuite il substitue cette valeur dans l'intégrale générale de l'équation de l'orbite, & il fait égal à zéro dans cette intégrale, le terme qui contiendroit $\cos.\,z$.

2. On pourroit d'abord demander sur quel fondement ce Géometre donne à la valeur du rayon la forme qu'il choisit, & dans laquelle il n'y a d'indéterminés que les

coëfficiens conſtans. D'où ſait-on que la valeur du rayon doit avoir cette forme? Ne pourroit-on pas croire qu'en donnant une autre forme à la valeur du rayon, toujours avec des coëfficiens indéterminés, ſubſtituant cette valeur dans l'intégrale générale, & comparant les termes d'une autre maniere, on parviendroit à un autre réſultat qui n'approcheroit pas moins du vrai que le premier, ou du moins qui pourroit paroître auſſi légitime, puiſque l'Analyſe n'offriroit aucune raiſon de préférence? Et ce doute ne ſeroit-il pas d'autant plus fondé, qu'il ne s'agit point ici d'avoir la valeur du rayon de l'orbite éxactement, mais ſeulement à peu-près?

3. D'où ſait-on en particulier que la valeur du rayon ne doit point contenir cof. 2? Il ſeroit d'autant plus naturel de penſer le contraire, que l'équation de l'orbite non troublée contient ce terme cof. 2 avec un coëfficient conſidérable, & qu'il eſt aſſez difficile de concevoir (ſur-tout quand on ſe contente de le ſuppoſer, & qu'on ne le tire pas directement de la ſolution même) comment ce terme ſi conſidérable peut diſparoître tout-à-coup par l'action de très petites forces perturbatrices?

4. La ſolution dont nous parlons, porte même à conſerver les termes de cette forme; car un des grands avantages de cette ſolution (ſelon ſon Auteur) eſt de renfermer d'une part l'équation de l'orbite non troublée, & de l'autre la perturbation; or il eſt naturel de croire que la premiere ſubſtitution à faire dans la partie qui contient la perturbation, eſt celle du rayon de l'orbite

primitive & non troublée, lequel rayon contient cof. z dans ſon expreſſion.

5. Enfin puiſque ce terme A cof. z, qu'on avoit exclu de la valeur du rayon, ſe retrouve après les ſubſtitutions dans l'intégrale, pourquoi vouloir l'en chaſſer en faiſant ſon coëfficient égal à zéro? Quand même on accorderoit à l'Auteur de cette ſolution, qu'il a pû omettre ce terme dans la premiere valeur approchée qu'il a ſuppoſée au rayon de l'orbite, il n'en ſeroit pas plus en droit de le faire diſparoître dans la valeur tirée de l'intégrale. Car la premiere valeur qu'il a ſuppoſée au rayon, n'eſt qu'une valeur approchée; il peut donc ſe trouver dans la ſeconde valeur, & il s'y trouve en effet des termes très-petits qui ne ſont pas dans la premiere; or le terme qui contient cof. z, peut être du nombre de ces derniers, & avoir un coëfficient très-petit, comme les autres termes qui ne ſe trouvent pas dans la premiere valeur ſuppoſée au rayon; pourquoi donc vouloir que le coëfficient de ce terme ſoit $= o$, lorſqu'on ne fait pas la même ſuppoſition ſur les autres?

6. Cette derniere objection revient pour le fond, à celle qui a été déja faite à ce ſavant Géometre par M. Fontaine, ſur la ſuppoſition qu'il fait dans ſa ſolution, du coëfficient de cof. z égal à zéro. M. Fontaine, en enviſageant l'équation intégrée ſous une autre forme, fait voir que ſuppoſer le coëfficient de cof. $z = o$, c'eſt ſuppoſer égale à zéro, une conſtante qu'on doit ajouter en intégrant, & qu'on n'eſt pas le maître de ſuppoſer nulle,

quand on n'a pas démontré directement & *à priori* qu'elle le doit être (*a*).

X.

1. Notre habile Analyſte ne peut faire qu'une ſeule réponſe à cette derniere objection & à toutes celles de l'article précédent; c'eſt que s'il conſervoit dans la valeur du rayon des termes qui continſſent cos. z, ces termes dans la ſuite du calcul introduiroient des arcs de cercle dans la valeur du rayon, & rendroient ſa ſolution fautive. Mais en premier lieu, d'où ſait-il que la valeur du rayon ne doit point contenir d'arcs de cercle? Il eſt vrai qu'elle ne doit point en contenir, pour être conforme à ce que les obſervations nous apprennent du mouvement des Planètes, & principalement de la Lune; mais il pourroit ſe faire que la théorie Newtonienne donnât à cet égard un réſultat différent des Phénomènes; & ſuppoſer le contraire, c'eſt ſuppoſer ce qui eſt en queſtion; il faut faire voir *à priori*, & par la nature de l'équation même (ce que notre ſavant Mathématicien n'a pas fait) que la valeur du rayon ne doit point contenir d'arcs de cercle.

2. En ſecond lieu, quand même on ſe ſeroit aſſuré, par une voie directe & analytique, qu'il ne devroit point

(*a*) Le Mémoire de M. Fontaine ſur ce ſujet, doit ſe trouver dans le Recueil de ſes Œuvres, qui eſt actuellement ſous Preſſe, & qui vraiſemblablement ne tardera pas à paroître.

y avoit d'arcs de cercle dans la valeur du rayon, il y auroit, pour faire disparoître ces arcs, un autre moyen que de supposer égal à zéro le coëfficient de cos. z; ce seroit de donner à cos. z un coëfficient indéterminé A, & par le moyen de ce coëfficient & des autres, de rendre égaux à zéro les termes qui contiendroient des arcs de cercle dans l'expression du rayon trouvée par l'intégration. J'avoue que ce calcul seroit plus compliqué que celui dans lequel on fait $= o$ le coëfficient de cos. z; mais le degré de complication plus ou moins grand ne décide rien ici pour ou contre la méthode; il falloit faire voir *à prioni*, & par la nature de l'équation même, pourquoi le coëfficient de cos. z doit être nécessairement égal à zéro, pour qu'il ne se rencontre point d'arcs de cercle dans l'expression du rayon-vecteur; & c'est encore ce que l'Auteur de la solution dont il s'agit, n'a pas fait.

3. Il est vrai que dans la premiere substitution, où l'on néglige une grande quantité de termes, ceux qui renfermeroient des arcs de cercle ne donneroient point d'autre condition que celle du coëfficient A égal à zéro; mais qu'on continue le calcul, qu'on ajoute de nouveaux termes avec des coëfficiens indéterminés à la formule du rayon vecteur, & qu'on pousse l'éxactitude plus loin dans les substitutions, & on verra bientôt que les termes qui doivent renfermer des arcs de cercle dans l'intégrale, contiendront dans leur coëfficient d'autres indéterminées que A; que d'ailleurs cette indéterminée A s'y trouvera

élevée à différentes puiſſances, & que par conſéquent on pourra faire évanouir ces termes par d'autres ſuppoſitions que par celle de $A = o$.

4. En troiſiéme lieu, quand même toutes les ſuppoſitions qu'on peut faire pour anéantir les termes qui contiennent des arcs de cercle, reviendroient à celle de $A = o$ (ce qui n'eſt pas), il eſt certain que cela ne ſe voit pas facilement; & que la ſolution ſeroit au moins imparfaite à cet égard, puiſqu'on y auroit ſuppoſé comme vraies des choſes qui demandoient à être prouvées.

5. Enfin (& c'eſt ici le point important & déciſif) ſi dans la ſolution que nous examinons, les termes qui contiennent $\cos. z$ donnent des arcs de cercle, c'eſt un défaut particulier à cette ſolution, & qu'elle n'auroit pas ſi l'Auteur eût donné à l'équation différentielle de l'orbite, & à ſon intégrale, la vraie forme qu'elle doit avoir dans le cas de l'orbite des Planètes, & ſinguliérement de l'orbite de la Lune.

6. Cette forme conſiſte à ſuppoſer, comme je l'ai fait, $u = \omega + s$, ω étant la valeur premiere de u au commencement du mouvement. Cette valeur de u étant ſubſtituée dans l'équation différentielle, on verra, après le développement des différens termes, qu'au lieu du terme $u\,dz^2$ dont le coëfficient eſt l'unité, & qui fait le grand embarras de la ſolution que nous examinons, on aura un terme de cette forme $K.t\,dz^2$, K étant un coëfficient différent de l'unité, & qui pour la Lune, par exemple,

est égal à environ $1 - \frac{3n^2}{2}$ (n étant le rapport du mouvement moyen du Soleil à celui de la Lune); au moyen de ce coëfficient, s'il se trouve dans l'expression du rayon des termes qui renferment cos. z, ces termes ne doivent point donner des arcs de cercle dans l'équation intégrée, mais des termes de cette forme $\frac{B \cos. z}{K-1}$, comme il résulte de ma solution; toute autre solution est donc fautive à cet égard, & induit l'Analyste en erreur.

XI.

1. Aussi la solution que nous examinons, ne donneroit-elle point la vraie valeur du rayon vecteur de la Lune, si l'apogée du Soleil étoit immobile; car dans ce cas l'Auteur convient lui-même (Voyez sa *Théorie de la Lune*, p. 51.) que sa solution donneroit des arcs de cercle dans la valeur du rayon vecteur. Cependant il est aisé de voir par l'article précédent, que dans le cas même où l'apogée du Soleil seroit immobile, il ne devroit pas y avoir pour cela des arcs de cercle dans l'expression du rayon; car l'immobilité de l'apogée donneroit à la vérité des cos. z dans la différentielle, mais on vient de voir que dans une solution éxacte (telle qu'est la nôtre) ces cos. z ne doivent point donner d'arcs de cercle.

2. D'ailleurs en supposant même faussement que les termes qui renfermeroient cos. z dans la différentielle, dussent donner des arcs de cercle dans l'intégrale, on peut

peut demander à l'Auteur de la ſolution que nous examinons, pourquoi ces cof. z, que renfermeroit l'équation différentielle dans le cas où l'apogée du Soleil ſeroit immobile, l'embarraſſeroient plus que les cof. z que renferme l'équation intégrale primitive du rayon vecteur, & qu'il fait diſparoître au moyen des indéterminées? Pourquoi n'y auroit-il pas quelque expreſſion indéterminée à donner au rayon vecteur, & qui étant ſubſtituée dans l'équation différentielle, feroit diſparoître tous les cof. z? Cela ſeroit facile: car trouvant d'abord au rayon vecteur (avec M. Clairaut) un terme de cette forme A cof. z, & ſubſtituant ce terme dans l'équation différentielle; ſoit $mA\,dz^2$ cof. z le terme qui en réſulte, & $B\,dz^2$ cof. z le terme qui vient de l'immobilité ſuppoſée de l'apogée du Soleil; on aura $mA + B = o$, ou $A = -\frac{B}{m}$: ſuppoſition qui empêchera qu'il ne ſe rencontre des arcs de cercle dans l'intégrale. Pourquoi l'Auteur n'a-t-il pas fait cette ſuppoſition, ou pourquoi n'a-t-il pas démontré qu'il ne faut pas la faire?

XII.

1. En vain ce ſavant Mathématicien allégueroit-il ce qu'il a dit, p. 52 de ſa *Théorie de la Lune*, que l'apogée du Soleil n'eſt pas immobile, & qu'ainſi au lieu des cof. z il y aura dans l'équation différentielle des cof. pz, dans leſquels p eſt un nombre qui n'eſt pas éxactement l'unité, quoiqu'il en diffère preſque inſenſiblement, attendu le

mouvement presque insensible de cet apogée.

2. Cette réponse ne mettroit pas sa solution hors d'atteinte. Car 1°. il faudroit au moins qu'il convînt que cette solution seroit fautive dans le cas du repos de cet apogée, où d'autres solutions, telles que la mienne, n'ont pas le même inconvénient; or une solution qui ne s'étend pas à tous les cas où elle devroit & pourroit s'étendre, n'est pas une bonne solution. 2°. Dans le cas même de la mobilité de cet apogée, ce savant Géometre a tort de croire, comme il le dit, p. 52 de sa Théorie, que le diviseur de cos. pz dans l'intégrale soit $1 - pp$; & d'en conclure, comme il le fait au même endroit, *qu'on ne puisse trouver par la théorie* les coëfficiens de ces sortes de termes; car le diviseur seroit, non pas $1 - pp$, mais $K - pp$, ou (pour la Lune) à très-peu-près $1 - \frac{3n^2}{2} - pp$, c'est-à-dire, à-peu-près $-\frac{3n^2}{2}$; & comme le numérateur de ces termes est beaucoup plus petit, étant de l'ordre de $\frac{n^2\lambda}{B}$, où λ est à-peu-près l'excentricité de l'orbe de la Terre, c'est-à-dire, $\frac{1}{60}$, & $\frac{1}{B}$ le rapport de la parallaxe du Soleil à celle de la Lune; il n'en résulte point d'inconvénient dans l'intégrale, puisque le coëfficient après l'intégration est encore de l'ordre de $\frac{\lambda}{B}$, c'est-à-dire, d'environ $\frac{15}{57.60^2}$, en supposant la parallaxe du Soleil de $15''$, & celle de la

Lune de 57′. C'eſt ce que j'ai fait voir plus en détail dans ma Théorie de la Lune, p. 237 & 244.

XIII.

1. Voilà une partie des défauts qu'on peut reprocher à la ſolution que nous examinons, & dont nous avons été forcés de parler, par la néceſſité de défendre la nôtre contre les objections de l'Auteur.

Ajoutons que cette méthode laiſſe à deſirer non-ſeulement du côté de l'exactitude, mais encore du côté de la ſimplicité & de l'élégance. En effet, ſi on ſe permet avec l'Auteur de ſuppoſer une valeur indéterminée au rayon vecteur, l'intégration de l'équation différentielle de l'orbite devient alors abſolument inutile; il ſuffit de ſubſtituer dans la différentielle la valeur ſuppoſée du rayon vecteur, & de faire les coefficiens des différens termes chacun égaux à zéro.

2. C'eſt la méthode qu'a ſuivie le célébre M. Euler, & qui eſt la plus ſimple & la plus facile de toutes; elle n'a qu'un ſeul inconvénient, comme je l'ai déja remarqué dans mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, art. 103, 104 & 106. C'eſt qu'on n'eſt pas aſſuré que la forme qu'on donne à l'expreſſion du rayon vecteur, ſoit la vraie; j'ai même fait voir que cette ſuppoſition avoit en effet produit une mépriſe dans la ſolution de M. Euler.

3. Mais l'inconvénient qui réſulte de cette ſuppoſition, eſt beaucoup moins grand dans la ſolution de M.

Euler, que dans celle que nous éxaminons. On desireroit seulement que M. Euler eût démontré directement & *à priori*, pourquoi la forme qu'il suppose au rayon vecteur est la vraie; & en particulier, pourquoi il ne fait point entrer cos z dans l'expression de ce rayon. Du reste sa méthode pour connoître le rayon vecteur par le seul secours de l'équation différentielle, est très-courte, très-élégante, & n'est point sujette aux autres difficultés que les cos. z font naître dans la solution éxaminée ci-dessus; difficultés particulieres à cette solution, puisqu'elles viennent de la forme peu avantageuse que son Auteur a donnée à l'intégrale qui exprime le rayon de l'orbite.

XIV.

1. La solution que j'ai donnée du Problême des trois Corps, appliqué au mouvement des Planètes, demande des intégrations pour trouver la valeur du rayon vecteur; & à cet égard elle est moins simple que celle de M. Euler; mais elle a sur cette solution & sur toutes les autres, l'avantage de donner directement & sans aucune supposition précaire, la forme du rayon vecteur. Et d'abord l'on voit d'un coup d'œil par la premiere intégration, qu'à cause du coëfficient K du terme $rd\,z^2$, le rayon vecteur ne doit point renfermer de cos. z.

2. De plus ma solution a sur celle que j'ai éxaminée dans ce Mémoire, l'avantage de n'être point fautive, dans le cas même où il se rencontreroit des cos. z dans l'équation différentielle; cas où cette derniere solution

donne des arcs de cercle, quoiqu'il ne doive point y en avoir; voyez §. XI.

3. En général si $A\,dz^2$ cos. Qz est un des termes de la différentielle, ma méthode donne dans tous les cas le diviseur que A doit avoir dans l'intégrale, & qui n'est point $1 - QQ$, comme le donne la solution éxaminée dans ce Mémoire, mais $1 - \frac{3n^2}{2} - QQ$, ou plus généralement $K - QQ$, K étant le coëfficient du terme $t\,dz^2$.

4. Ma méthode a de plus l'avantage de la facilité du calcul. Car 1°. la seule inspection du coëfficient K du terme $t\,dz^2$ donne le premier terme de la série qui exprime le mouvement de l'apogée; ensorte que $z\sqrt{K}$ est la premiere valeur de l'anomalie. 2°. De même la seule inspection des termes qui renferment cos. Nz dans la différentielle, donne tout d'un coup, & sans employer aucun autre calcul, la correction qu'il faut faire au mouvement de l'apogée; ensorte que si γ est le coëfficient de ces termes, la correction à faire à $\sqrt{K}$ est $\sqrt{K + \frac{\gamma}{P}}$; P exprimant l'excentricité. Et l'on ne sauroit m'objecter que des termes de cette forme $\gamma\,dz^2$ cos. Kz devroient donner des arcs de cercle dans ma solution; car j'ai démontré *directement*, art. 27. de ma *Théorie de la Lune*, que la valeur du rayon ne devoit point contenir d'arcs de cercle dans le cas de l'orbite des Planètes, & j'ai donné le moyen de faire disparoître ces arcs. J'ai de

plus déterminé, p. 242 & 243 de la même Théorie, les cas où les termes de cette forme $\gamma\, dz^2 \cos. Kz$ donneroient des arcs de cercle; & j'ai remarqué que ces cas n'ont point lieu dans l'orbite des Planètes.

XV.

1. L'avantage que ma solution me paroît avoir de donner avec facilité & d'une maniere directe la forme du rayon vecteur, & le mouvement des apsides, a lieu non-seulement dans la théorie de la Lune & des autres Planètes, mais aussi dans tous les Problêmes du même genre, où il est question de trouver l'orbite décrite en vertu des forces perturbatrices ajoutées à la force primitive. Supposons, par exemple, avec le savant Géometre dont nous examinons la solution, que π soit $= o$, & la force $\Psi = \frac{F}{u^2} + \frac{K}{u^3}$, ou $Fu^2 + Ku^3$ (α); alors l'équation différentielle de l'orbite, en employant ma méthode, & en faisant $u = a + \varepsilon = 1 + \varepsilon$, sera $d\,d\varepsilon + \left(1 - \frac{K}{\varepsilon\varepsilon}\right)\varepsilon\, dz^2 - F\,dz^2 + dz^2 - K\,dz^2 = o$; d'où l'on tire tout d'un coup en intégrant par ma méthode (art. 25 de ma *Théorie*) $\varepsilon = \frac{(1 - K - F)\cos z\sqrt{1 - \frac{K}{\varepsilon\varepsilon}} - 1}{1 - \frac{K}{\varepsilon\varepsilon}}$; & par conséquent la valeur de u ou $1 + \varepsilon$.

(a) Voyez p. 18 de la Théorie de la Lune.

2. Au contraire le Géometre dont nous venons de parler, eſt obligé, pour ce cas ſi ſimple, d'employer la méthode des indéterminées, qui eſt moins directe, & plus longue; moins directe, parce qu'on a beſoin, de l'aveu de ce Géometre, de ſavoir d'avance la forme que doit avoir l'expreſſion du rayon vecteur; plus longue, parce qu'il faut employer au moins trois indéterminées; la premiere, pour faire diſparoître le terme qui contiendroit cos. z; la ſeconde, pour connoître le coëfficient de z, ou, ce qui revient au même, le mouvement de l'apſide; & la troiſiéme, pour déterminer le terme conſtant que l'expreſſion de u doit contenir.

3. L'inconvénient de la méthode que nous examinons, eſt encore plus grand, lorſque la force Ψ eſt égale à $Fu^2 + Ku^n + Lu^n$ &c. un des coëfficiens m, n &c. étant différent du nombre 3; car indépendamment de la longueur du calcul, qui eſt incomparablement plus grande que par ma méthode, ce cas a un inconvénient de plus que celui de $\Psi = Fu^2 + Ku^3$. En effet dans le cas où $\Psi = Fu^2 + Ku^3$, quoiqu'on ne ſoit pas ſûr d'abord que la valeur indéterminée qu'on a ſuppoſée au rayon vecteur, ait la forme convenable, on en eſt aſſuré à la fin du calcul, parce que l'intégrale ſe trouve éxacte, en déterminant convenablement les conſtantes inconnues. Au contraire dans le cas de $\Psi = Fu^2 + Ku^n + Lu^n$ &c. l'intégrale n'eſt pas éxacte, & ne ſauroit l'être par aucune méthode; on ne ſauroit donc être ſûr que la forme qu'on a ſuppoſée au rayon vecteur, ſoit la vraie:

d'autant plus que si on lui donnoit une autre forme ; & dans laquelle il se trouvât, par exemple, des cos. z, la formule de notre savant Géometre donneroit en ce cas des arcs de cercle dans l'expression du rayon vecteur ; & qu'il faut démontrer auparavant (ce qu'il n'a pas fait) qu'il ne doit point y avoir des arcs de cercle dans cette expression.

4. Ma méthode n'est point sujette à ces inconvéniens. Car 1°. j'ai démontré (art. 27 de *ma Théorie de la Lune*) qu'il ne devoit point y avoir d'arcs de cercle dans l'équation de l'orbite, au moins dans le cas où K & L sont très-petits par rapport à F ; ce qui est le seul cas dont il soit question ici. 2°. Je trouve par le calcul le plus court & le plus simple, l'équation différentielle approchée $dddt + \left(1 - \frac{\overline{m-2}.K}{gg} - \frac{\overline{n-2}.L}{gg}\right) t\,dz^2 + (1 - K - L - F)\,dz^2 = 0$, dont l'intégrale est par l'art. 25 de ma *Théorie*, $t = \frac{1 - K - L - F}{1 - \frac{\overline{m-2}.K}{gg} - \frac{\overline{n-2}.L}{gg}} \times \left(-1 + \cos. z \sqrt{1 - \frac{\overline{m-2}.K}{gg} - \frac{\overline{n-2}.L}{gg}}\right)$. 3°. Elle donne enfin, comme on le voit par l'art. 27 de cette même *Théorie*, un moyen facile d'approcher de plus en plus de la vraie valeur de t, & de corriger le mouvement déja trouvé des apsides, sans avoir aucune indéterminée à introduire dans l'expression du rayon, & sans

sans être embarrassé des termes qui paroîtroient devoir donner des arcs de cercle dans l'expression du rayon vecteur.

XVI.

1. On peut voir dans mes *Recherches sur le Système du Monde*, p. 110 de la premiere partie, & p. 237 & suiv. plusieurs autres remarques sur l'intégration de l'équation différentielle de l'orbite des Planètes. Je ne répéterai point ici ces remarques, auxquelles je renvoye le Lecteur. J'ajouterai seulement à ce qui a été dit à la page 241 de cet Ouvrage, que quand il se trouveroit dans l'équation différentielle de l'orbite lunaire, des termes de cette forme cos. $N\zeta - n\zeta + \pi n\zeta$, ($N$ manquant, non pas la racine du coëfficient de $rd\zeta^2$, mais le mouvement réel de l'apogée de la Lune, & π étant un nombre très-peu différent de l'unité, qui donne le mouvement de l'apogée du Soleil); il n'y auroit point à craindre que ces termes en introduisissent de trop grands par l'intégration. Car le diviseur de ces termes dans l'intégrale seroit (p. 244 & suiv. de notre Théorie) $1 - \frac{\beta n^2}{2} - \frac{3n^2}{2} - (N - n + \pi n)^2$; c'est-à-dire, à très-peu-près $-\frac{3n^2}{2} - N^2$, ou $-\frac{3n^2}{2}$, qui ne seroit pas trop petit eu égard au coëfficient que pourroient avoir ces termes dans la différentielle. Ainsi quand même il se trouveroit dans l'équation différentielle des termes qui contiendroient cos.

$Nz - nz + \pi nz$, ces termes, quoique fort augmentés par l'intégration, demeureroient encore très-petits.

XVII.

Après avoir exposé les avantages de ma solution du Problême des trois Corps, je ne dois point dissimuler qu'elle a des inconvénients : mais ces inconvénients lui sont communs avec toutes les autres solutions, & viennent de ce qu'on n'a point encore de méthode complette pour résoudre le Problême dont il s'agit.

Ces inconvénients sont en général :

1°. Que le grand nombre de quantités, qu'on est forcé de négliger, rend la valeur des coëfficients très-incertaine. J'en ai donné la preuve dans la premiere & la troisiéme partie de mes *Recherches sur le Système du Monde*. Voyez premiere Partie, p. 197—204, 234, 235, 249, 250, 254; & troisiéme Partie, p. 17, 28, 29, 30, 31. Voyez aussi l'Ecrit inséré à la fin de la seconde Edition de mon *Traité de Dynamique*.

2°. Que les séries qui expriment la valeur des coëfficiens, ne sont pas toujours convergentes; c'est ce qu'on remarque sur-tout dans celle qui exprime le mouvement de l'apogée, & dont le premier terme ne donne qu'environ la moitié de ce mouvement. M. Clairaut s'en est apperçu le premier, & a remarqué qu'en poussant le calcul plus loin, on retrouvoit l'autre moitié de ce mouvement. Mais quoique cette remarque soit très-importante, & réponde à la difficulté qui avoit élevée sur le mouvement de l'apo-

gée ; cependant, pour s'assurer entiérement de la conformité de la théorie avec les observations, ce calcul ne suffisoit pas encore, ainsi que je l'ai déja remarqué ailleurs. Car les deux premiers termes de la série qui exprime le mouvement de l'apogée, étant à-peu-près égaux, il pouvoit se faire que la série ne fût pas convergente au-delà de ces deux termes ; il falloit donc prouver que les termes suivans étoient beaucoup plus petits que les deux premiers ; & c'est ce que j'ai fait dans la premiere Partie de mes *Recherches*, Ch. XX. Cependant, malgré le résultat favorable de ce calcul, c'est toujours une imperfection commune à toutes les solutions, de ne pas donner le mouvement de l'apogée par une série qui soit tout d'un coup convergente.

3°. Le même inconvénient se rencontre, mais moins sensiblement, dans plusieurs autres termes de l'équation lunaire ; inconvénient qui tient encore à l'imperfection de l'approximation. J'en ai donné la preuve dans les endroits déja cités de mes *Rech. sur le Système du Monde*.

4°. Enfin on remarquera qu'il y a plusieurs termes, qui étant très-petits dans l'équation différentielle de l'orbite lunaire, augmentent considérablement par l'intégration. Tels sont, par exemple, les termes qui expriment les sinus de $2z - 2nz - 2Nz$, n étant le rapport de la révolution moyenne de la Lune à celle du Soleil, & Nz l'anomalie de la Lune. J'ai remarqué le premier la nécessité d'avoir égard à ces termes dans l'équation de l'orbite lunaire ; & je fis part de cette remarque, pendant

l'Eté de 1748, à M. Clairaut, qui n'ayant pas encore fait à ces ſortes de termes une attention ſuffiſante, croyoit alors que la théorie s'éloignoit entiérement des obſervations.

5°. Il eſt d'autres termes qui peuvent augmenter encore plus que ceux-ci par l'intégration; & qui peuvent même augmenter aſſez pour rendre la vraie valeur des coëfficiens aſſez incertaine. Tels ſont, par exemple, les termes qui renferment ſin. $2z - 2pz - 2Nz$, p étant le rapport du mouvement moyen du nœud à celui de la Lune; voyez la premiere Partie de mes *Rech.* p. 47 & 49; & la troiſiéme Partie, p. 17. Il y auroit même telle combinaiſon qui rendroit énormément grand le réſultat de l'intégration. Par exemple, s'il ſe trouvoit dans $\int \pi x^3 dz$ des ſinus de $nz - \pi nz$ (πnz exprimant l'anomalie du Soleil); la double intégration qu'exige la quantité $nn dz \int \pi x^3 dz$ dans l'expreſſion du tems, donneroit pour dénominateur $n^2 (1 - \pi)^2$; c'eſt-à-dire, une quantité d'une petiteſſe extrême, puiſqu'à cauſe de la lenteur du mouvement de l'apogée du Soleil, $1 - \pi$ eſt preſque égal à zéro; en ce cas l'intégrale deviendroit fort grande. S'il ſe trouvoit par haſard dans l'équation de l'orbite lunaire des termes de cette ſorte, ils mettroient en défaut toutes les théories connues.

Or dans la combinaiſon infinie & inépuiſable des différens termes qui doivent entrer dans l'équation de l'orbite lunaire, il me paroît bien difficile de s'aſſurer qu'on n'aura point de pareils termes. Leur effet ſeroit de pro-

duire à la longue une altération *apparente* dans le moyen mouvement, tant que $nz - \pi nz$ ſeroit aſſez petit pour que ſin. $nz - \pi nz$ pût être cenſé à-peu-près égal à $nz - \pi nz$; car ſoit A le coëfficient de ſin. $nz - \pi nz$ qu'on ſuppoſe entrer dans la valeur de $\int \pi x^3 dz$; l'intégration donnera $\frac{A \text{ cof. } nz - \pi nz}{n(1-\pi)}$; & la double intégration $\frac{A \text{ ſin. } nz - \pi nz}{n^2(1-\pi)^2} = \frac{Ax}{n(1-\pi)}$, c'eſt-à-dire, proportionnelle au moyen mouvement; ce qui donne par conſéquent une altération apparente au moyen mouvement, tant que $nz - \pi nz$ eſt une partie aſſez petite de la circonférence. Mais au bout d'un grand nombre d'années, ou, ſi l'on veut, de ſiécles, lorſque ſin. $nz - \pi nz$ ne peut plus être pris pour $nz - \pi nz$; alors l'équation n'eſt plus proportionnelle au moyen mouvement, & rentre dans la claſſe des équations ordinaires (*a*).

Il ſuit de-là que les ſolutions trouvées juſqu'ici du Problême des trois Corps, & en particulier des inégalités de la Lune, n'ont point encore le dégré de perfection qu'on y peut ſouhaiter; & on ne ſauroit trop exhorter les Géomettes à chercher les moyens de parvenir à

(*a*) Voyez la ſeconde Partie de mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, p. 94 & ſuiv. J'y fais voir que l'altération *apparente* du moyen mouvement de Saturne pourroit bien tenir à des termes de cette eſpéce; c'eſt auſſi ce qu'on a remarqué depuis dans la piéce qui a remporté le Prix de l'Académie des Sciences en 1760, ſur l'*altération du mouvement moyen des Planétes*.

ce but si désiré, en perfectionnant, si cela est possible, les méthodes analytiques qui peuvent y conduire.

XVIII.

Dans l'application du Problême des trois Corps au mouvement de Jupiter & de Saturne, il se rencontre une difficulté que M. Euler a le premier résolue, & qui vient des coëfficiens de certains termes de l'équation. Voyez mes *Recherches sur le Système du Monde*, seconde Partie, art. 222 & suiv. Je dois remarquer à cette occasion, que quand j'ai proposé, art. 232 du même Ouvrage, une méthode pour trouver les coëfficiens de ces termes, par la rectification des Sections coniques, & que j'ai donné cette méthode *comme plus curieuse & plus géométrique, que commode pour le calcul*; ce n'est pas que je ne la croye très-praticable, & préférable même aux quadratures que d'autres Géometres ont employées pour le même objet; car en général les approximations par rectification sont plus exactes que les approximations par quadrature; mais c'est que j'avois donné dans cette même *seconde Partie*, pag. 55 — 89, d'autres méthodes encore plus commodes (& aussi exactes, ce me semble, qu'aucune autre), pour parvenir à la valeur de ces coëfficiens; méthodes qui m'appartiennent en propre, & qui consistent dans la sommation approchée de certaines series, dont les derniers termes forment à-très-peu-près une progression géométrique.

Je fais cette remarque relativement à deux endroits

des Mémoires de l'Académie de 1754, p. 545 & 549. Au reste que l'on employe ces series, ou la quadrature mécanique de certaines courbes, ou la rectification des Sections coniques, il n'est pas moins certain que la méthode donnée dans ces Mémoires, est fondée sur une idée que j'ai proposée le premier, & qui n'a rien de commun, comme on l'a voulu faire entendre, avec la méthode, d'ailleurs très-ingénieuse, de M. Euler. Cette idée consiste à remarquer, comme je l'ai fait art. 232 de la seconde Partie de mes *Recherches sur le Système du Monde*, que la connoissance des coëfficiens dépend de l'intégration complette de certaines quantités, lorsque la variable qu'elles renferment, est égale à la moitié de la circonférence, ou à la circonférence entiere; ce que j'ai démontré de la maniere la plus simple, sans avoir besoin du savant circuit qu'on a employé pour cela dans les Mémoires cités de 1754.

XIX.

Je viens maintenant à mes nouvelles Tables. La forme que je leur donne, est celle que M. Euler a employée le premier, & que M. Mayer a suivie. Elle consiste à regarder l'excentricité comme constante, & à substituer à l'excentricité variable des Tables des *Inégalités*, un terme proportionnel à $\sin 2Z - 2z' - N.Z$, qui fait à-peu-près le même effet. Comme les Astronomes commencent à faire usage des Tables disposées suivant cette nouvelle forme, qui est en effet plus commode & plus simple,

je me ſuis déterminé à donner maintenant à mes Tables cette forme qui réſulte immédiatement de la théorie, & que je leur aurois donnée plutôt, ſi je n'avois vû les Aſtronomes encore attachés à la forme ancienne, comme je l'ai dit en publiant mes premieres Tables.

Il y a néanmoins quelque différence entre la forme des Tables de M. Mayer, & la forme des miennes.

1°. M. Mayer ſuppoſe qu'on ait calculé le lieu vrai du Soleil, au lieu que je n'ai beſoin que du lieu moyen de cet Aſtre. Cette ſuppoſition abrege le calcul; il eſt vrai qu'on ne pourroit pas employer le même abrégé pour ſimplifier les Tables des *Inſtitutions*, comme je l'ai remarqué dans la troiſiéme Partie de mes *Recherches*, §. XXIV, mais cela vient de la forme particuliere aux Tables des *Inſtitutions*, qui eſt très-différente de celle des Tables de M. Mayer.

2°. J'ai donné une diſpoſition différente à mes Tables quant à la place que certaines équations y occupent.

3°. Quelques équations, comme celle des argumens VI & XIII, me ſont particulieres.

4°. Quelques équations ſont autrement préſentées, comme celles des argumens IV & V. qui reviennent à l'équation VIII de M. Mayer, & à l'équation qu'il donne pour l'anomalie moyenne, dont je ſuppoſe au contraire que le mouvement eſt uniforme, ce qui me paroît plus ſimple.

5°. Dans notre argument XV, qui répond à l'argument XIII de M. Mayer, on n'a point d'égard à la correction qui

qui vient de l'équation du centre, au lieu que M. Mayer y a eu égard, comme on l'a déja remarqué dans la troiſiéme Partie des *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, p. 24.

XX.

Du reſte, pour conſtruire les différentes équations de ces Tables, voici comment je m'y ſuis pris.

J'ai eu recours aux quatre différentes Tables, dont j'ai offert la comparaiſon, p. 28 de la troiſiéme Partie de mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*; & voici l'uſage que j'en ai fait. Je ſuppoſe que le Lecteur ait ces Tables ſous les yeux.

La premiere équation qui eſt proportionnelle à ſin. $\pi\zeta'$, & qui dépend de l'anomalie moyenne du Soleil, je l'ai priſe de $11'\ 30''$, qui eſt à-peu-près le milieu entre les quatre Tables; le vrai milieu eſt $11'\ 40''$, mais j'ai retranché $10''$, parce que je crois un peu trop grande l'équation $12'\ 57''$ que donne ma théorie; cette équation eſt le premier argument de mes nouvelles Tables.

J'ai conſervé la ſeconde équation de mes Tables $+ 2'\ 28''$ ſin. $2Z - 2\zeta' - 2N.Z$; parce que cette équation ne differe pas beaucoup de celle de M. Clairaut, & qu'il paroît que dans les Tables de Mr. Mayer & le Monnier, qui donnent $3'\ 45''$, on s'eſt contenté de la valeur de cette équation trouvée par Newton, dont la théorie ne ſemble pas aſſez éxacte. C'eſt le ſecond argument des nouvelles Tables de cet Ouvrage.

Il en eſt de même de l'équation $- 1'\ 9''$ ſin. $2\zeta' -$

$2pZ$, donnée par ma Théorie, & que j'ai conſervée par les mêmes raiſons. C'eſt le troiſiéme argument de mes nouvelles Tables.

Quant à la *variation* (qui fait l'argument XV des nouvelles Tables, & l'argument IV de la page 28 de la troiſiéme partie de mes *Recherches*); comme il eſt difficile de la déterminer rigoureuſement par la théorie, & que je crois en particulier, ainſi que je l'ai dit ci-deſſus, ne l'avoir pas déterminée aſſez éxactement par la mienne, j'ai pris le milieu 40′ 38″ entre les deux équations de Mrs Mayer & le Monnier, qui paroiſſent fondées ſur les obſervations. De plus (art. 95 de la premiere Partie de mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*) j'ai retranché 23″ à cauſe de la correction du lieu qui provient du mouvement des nœuds & de l'inclinaiſon, & j'ai eû 40′ 15″. Cette équation fait partie de l'argument XV de mes nouvelles Tables, du quel je parlerai encore plus bas.

Pour la cinquiéme équation, j'ai pris d'abord 1′ 30″ qui eſt à-très-peu-près le milieu entre les quatre équations des quatre Tables; ce qui donne d'abord $+ 1' 30''$ ſin. $2Z - 2z' + \pi z' - NZ$. De plus en mettant pour z', longitude vraie du Soleil, la quantité $\zeta - 2\lambda$ ſin. $\pi\zeta$ dans l'équation VII, il en vient à-peu-près un terme de cette forme $- 2' 32''$ ſin. $2z - 2\zeta + \pi\zeta - N.Z$; reſte donc $- 1' 2''$ ſin. $2Z - 2\zeta + \pi\zeta - N.Z$ pour dernier réſultat de l'équation. C'eſt l'argument X de mes nouvelles Tables.

J'ai gardé la ſixiéme équation 2′ 5″ que la Théorie

m'a donnée, & qui d'ailleurs eſt à-peu-près moyenne entre les deux de Mrs le Monnier & Mayer. Celle de M. Clairaut 3′ 40″ paroît incertaine, & je la crois trop grande. Voyez *Rech. ſur le Syſtême du Monde*, troiſiéme Partie, p. 29. C'eſt une partie de l'argument XV des nouvelles Tables.

Pour l'équation VII nommée *Evection*, j'ai pris l'équation — 1° 17′ de M. le Monnier, qui tient à-peu-près le milieu entre les autres; ayant d'ailleurs lieu de croire, comme je l'ai dit ci-deſſus, que l'équation 1° 18′ 18″ que j'ai trouvée par ma Théorie, eſt un peu trop grande. C'eſt l'argument XVI de mes nouvelles Tables.

Pour l'équation VIII, j'ai pris celle de M. Mayer — 3′ 0″, qui eſt à-peu-près moyenne entre les autres; c'eſt l'argument IX de mes nouvelles Tables.

Pour l'équation IX, j'ai pris — 1 38″ qui eſt à-peu-près moyenne entre les autres; & à laquelle les deux Tables de Mrs le Monnier & Mayer ſont d'ailleurs aſſez conformes; c'eſt l'argument IV de mes nouvelles Tables.

Pour l'équation X, j'ai pris + 2 20″, ſur laquelle Mrs Clairaut & Mayer s'accordent à-peu-près, & que j'ai reconnue par le calcul avoir en effet à-peu-près cette valeur; c'eſt l'argument V.

Pour la XIe Equation, j'ai pris d'abord 1′ qui eſt à-peu-près moyen entre les Tables de M. Clairaut & les miennes, & qui ne différe pas d'ailleurs beaucoup de celles de M. Mayer. Enſuite comme la ſubſtitution de $\zeta - 2\lambda$ ſin. $\pi\zeta$ au lieu de ζ' dans l'*Evection* donne encore ici +

$2'\,32''$ sin. $2Z - 2\zeta - \pi\zeta - N.Z$, il en réſulte l'équation totale $+ 3'\,32''$ sin. $2Z - 2\zeta - \pi\zeta - N.Z$; c'eſt l'argument XI de mes nouvelles Tables.

Pour la XIIe Equation, j'ai pris $1'\,2''$ qui eſt à-peu-près le milieu entre les Tables de M. Clairaut & les miennes, & qui d'ailleurs s'accorde à-très-peu-près avec celles de M. Mayer; c'eſt l'argument XII.

J'ai ſupprimé la XIIIe Equation, qui eſt nulle dans les deux Tables de Mrs Mayer & le Monnier, & qui eſt aſſez incertaine par la Théorie, comme on le voit non-ſeulement par ce que nous avons dit plus haut §. XVII, & p. 17 de la troiſiéme Partie de mes *Recherches*, mais encore par la comparaiſon des Tables de M. Clairaut avec les miennes, les deux réſultats étant même de ſignes différens.

Pour la XVe Equation, j'ai pris $-45''$, qui eſt celle des Tables des *Inſtitutions*, & qui eſt à-peu-près moyenne entre les autres; enſuite comme la *variation*, en mettant pour ζ' ſa valeur $\zeta - 2\lambda$ sin. $\pi\zeta$, donne à-peu-près $+ 1'\,8''$ sin. $2Z - 2\zeta + \pi\zeta$, il en réſulte une équation totale de $23''$; c'eſt l'argument VII.

Enfin pour la XVIe Equation, j'ai pris d'abord le réſultat $-1'\,2''$ des Tables de M. Mayer, qui eſt à-peu-près moyen entre les autres; à quoi ajoutant $-1'\,8''$, donné par la ſubſtitution de $\zeta - 2\lambda$ sin. $\pi\zeta$ dans la *variation*, j'ai $-2'\,10''$ sin. $2Z - 2\zeta - \pi\zeta$. C'eſt l'argument VIII.

A l'égard de la XVIIe Equation qui eſt nulle dans

les trois Tables de Mrs le Monnier, Clairaut & moi, je l'ai supprimée, quoique dans les Tables de M. Mayer elle monte à près de 30″.

J'aurois pû en faire de même de la XIVe Equation, qui est nulle dans les trois Tables de Mrs Mayer, le Monnier & Clairaut, & qui dans la mienne monte à 18″; cependant, comme j'ai tout lieu de croire que mon résultat est préférable, par la raison que mes formules (§. XII.) sont beaucoup plus éxactes pour calculer ces sortes d'équations, j'ai cru qu'on pourroit faire usage de cette équation; & j'en ai dressé une Table à part, dont j'ai fait l'Argument VI: on peut la supprimer quand l'argument sera de peu de degrés; l'équation qui en résulte, n'étant alors que de quelques secondes.

XXI.

L'Equation du moyen mouvement ou du tems par le mouvement vrai, qui donne la valeur de Z en z, renfermant deux termes de cette forme $+ \alpha$ sin. $2z - 2nz - Nz - 6$ sin. $2z - 2nz$, il en résulte 1°. une équation $- \frac{\alpha\alpha}{2}$ sin. $4Z - 4z' - 2N.Z$, qui donne en changeant le signe, pour appliquer cette équation au lieu moyen, un résultat égal à $+ 46''$ sin. $4Z - 4z' - 2N.Z$. Ce résultat fait partie de l'Argument XVI. 2°. Une équation $- 66$ sin. $4Z - 4z'$, qui donne en changeant le signe $+ 23''$ sin. $4Z - 4z'$. Ce résultat fait partie de l'Argument XV; dans la Table propre

à cet argument, il eſt combiné avec la *variation* & la VIe Equation dont il a été parlé ci-deſſus. 3°. Deux Equations $-\frac{\alpha c}{2}$ ſin. $N.Z + \frac{3\alpha c}{2}$ ſin. $4Z - 4z' - N.Z$, qui donnent en changeant les ſignes $+ 23''$ ſin. $N.Z - 1'12''$ ſin. $4Z - 4z' - N.Z$.

La premiere de ces Equations $+ 23''$ ſin. NZ doit ſe combiner avec l'Equation du centre (argument XIV.) que j'ai faite avec M. Mayer $- 6°.18'44''$, & qui s'accorde d'ailleurs très-bien avec les Tables de M. le Monnier, & à-très-peu-près avec les miennes.

A l'égard de l'Equation $- 1'12''$ ſin. $4Z - 4\zeta - N.Z$, j'en ai fait une Table particuliere, qui eſt celle de l'argument XIII. Cette derniere Equation paroît avoir été négligée (au moins en partie) par M. Mayer; & c'eſt peut-être pour cela que dans les ſyzygies, les Tables de cet habile Aſtronome donnent quelquefois autant d'erreur que hors des ſyzygies. Au reſte je ne dis ceci que par conjecture, M. Mayer n'ayant point encore publié la théorie ou la méthode d'après laquelle il a conſtruit ſes Tables.

XXII.

Pour calculer la latitude, j'ai employé la méthode expliquée dans la troiſiéme Partie de mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, p. 50 & 51; & c'eſt d'après cette méthode, que j'avois dreſſé d'abord les Tables de latitude, en prenant $9'30''$ pour l'équation du nœud, &

9′ pour la plus grande équation donnée par le ſecond argument de la latitude ; & en ſuppoſant l'inclinaiſon moyenne de 5° 9′.

Mais j'ai trouvé enſuite un moyen de rendre ces équations plus éxactes. Pour cela j'ai conſidéré 1°. que dans les équations du nœud, telles que nous les avons données dans la troiſiéme Partie des *Rech. ſur le Syſtême du Monde* §. VIII, on trouve entr'autres équations, ces deux-ci $-8'22'\sin.2z-2z'+8'22''\sin.2z-2pz$. 2°. Qu'à ces équations du mouvement du nœud, il en répond deux de même ſigne pour l'inclinaiſon ; ſavoir $(-8'22''\cos.2z-2z'+8'22''\cos.2z-2pz)\times\mu$, μ exprimant le rapport de la tangente de l'inclinaiſon au ſinus total. 3°. Que ſi par conſéquent on ſe ſert de ces équations pour corriger la latitude ſuivant la méthode donnée dans la troiſiéme Partie des *Recherches ſur le Syſtême du Monde* §. XXV ; on aura pour la correction de la latitude $-8'22''\times\mu\times\sin.z-pz-2z+2z'+8'22''\times\mu\sin.z-pz-2z+2pz$ = à très-peu-près $41''\sin.z-2nz+pz-41''\sin.z-pz$. Il faut donc retrancher 41″ de la plus grande équation de la premiere Table, ce qui la réduit à 5° 9′ — 41″, ou 5° 8′ 19″ ; & il faut au contraire ajouter 41″ à la plus grande équation de la ſeconde Table ; ce qui la change en 9′ 41″. C'eſt d'après cette correction que les deux premieres Tables de la latitude ont été formées.

Outre les deux équations du nœud dont nous venons de parler, il y en a encore une autre aſſez conſidérable

$+ 4'45''$ sin. $2z - 2N'z - 2pz$, qui peut produire environ $23''$ dans la latitude; cette équation est à-très-peu-près $+ 23''$ sin. $2Nz - z + pz$, & son argument est le double de l'anomalie moyenne de la Lune, moins l'argument de la latitude, ou plus éxactement, le double de l'argument XIV, moins l'argument de la latitude. J'en ai formé une troisiéme Table, qui ne se trouve point dans celles de M. Mayer.

XXIII.

Quant à la parallaxe de la Lune, j'ai employé d'abord la parallaxe moyenne de $57' 12''$, ainsi que je l'ai trouvée dans ma *Théorie de la Lune*, art. 154; or la parallaxe moyenne, suivant les Tables de M. Mayer, est $57' 18''$ (en prenant le milieu entre la plus grande parallaxe de ces Tables $60' 26''$, & la plus petite $54' 10''$); ainsi il faut ôter constamment $6''$ de la Table des parallaxes de M. Mayer. C'est de cette maniere que j'ai formé la Table des parallaxes.

A l'égard des deux Tables de corrections de la parallaxe, elles ont été faites d'après un calcul nouveau, qui s'accorde d'ailleurs assez avec les Tables de Mrs Mayer & Clairaut.

Fin du quatorziéme Mémoire.

NOUVELLES TABLES

NOUVELLES

TABLES

DE

LA LUNE.

EPOQUES POUR LES CALCULS DE LA LUNE.

N. B. Ces Epoques ſont conformes à celles des *Inſtitutions Aſtronomiques*, avec cette ſeule différence, qu'on a ajouté 15″ à la longitude moyenne de la Lune.

Années.	Longitude moyenne du Soleil.	Anomalie moyenne du Soleil.	Longitude moyenne de la Lune.	Longitude moyenne de ſon Apogée.	Anomalie moyenne de la Lune.	Nœud aſcendant rétrograde.
	Sig. D. M. S.	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*
1749	9 10 14 40	6 01 39 48	01 28 53 31	04 10 19 02	09 18 34 29	09 29 34 43
1750	9 10 00 21	6 01 24 26	06 08 16 34	05 20 58 52	00 17 17 42	09 10 15 00
1751	9 09 46 01	6 01 09 03	10 17 39 38	07 01 38 43	03 16 00 55	08 20 55 17
1752 B	9 10 30 49	6 01 52 48	03 10 13 16	08 12 25 14	06 27 48 02	08 01 32 23
1753	9 10 16 29	6 01 37 25	07 19 36 20	09 23 05 05	09 26 31 15	07 12 12 40
1754	9 10 02 09	6 01 22 02	11 28 59 23	11 03 44 55	00 25 14 28	06 22 52 56
1755	9 09 47 49	6 01 06 39	04 08 22 27	00 14 24 46	03 23 57 41	06 03 33 13
1756 B	9 10 32 38	6 01 50 25	09 00 56 05	01 25 11 17	07 05 44 48	05 14 10 19
1757	9 10 18 18	6 01 35 02	01 10 19 09	03 05 51 08	10 04 28 01	04 24 50 36
1758	9 10 03 58	5 01 19 39	05 19 42 12	04 16 30 58	01 03 11 14	04 05 30 53
1759	9 09 49 38	6 01 04 16	09 29 05 16	05 27 10 49	04 01 54 27	03 16 11 10
1760 B	9 10 34 27	6 01 48 02	02 21 38 54	07 07 57 20	07 13 41 34	02 26 48 16
1761	9 10 20 07	6 01 32 39	07 01 01 57	08 18 37 10	10 12 24 47	02 07 38 33
1762	9 10 05 47	6 01 17 16	11 10 25 00	09 29 17 01	01 11 07 59	01 18 08 50
1763	9 09 51 27	6 01 01 53	03 19 48 04	11 09 56 51	04 09 51 13	00 28 49 06
1764 B	9 10 36 15	6 01 45 38	08 12 21 43	00 20 43 23	07 21 38 20	00 09 26 12
1765	9 10 21 55	6 01 30 15	00 21 44 46	02 01 23 13	10 20 21 33	11 20 06 29
1766	9 10 07 36	6 01 14 53	05 01 07 50	03 12 03 04	01 19 04 46	11 00 46 45
1767	9 09 53 16	6 00 59 30	09 10 30 53	04 22 42 54	04 17 47 59	10 11 27 03
1768 B	9 10 38 04	6 01 43 15	02 03 04 32	06 03 29 26	07 29 35 06	09 22 04 09
1769	9 10 23 44	6 01 27 52	06 12 27 35	07 14 09 16	10 28 18 19	09 02 44 26
1770	9 10 09 25	6 01 12 30	10 21 50 39	08 24 49 07	01 27 01 32	08 13 24 43
1771	9 09 55 05	6 00 57 07	03 01 13 42	10 05 28 57	04 25 44 45	07 24 05 00
1772 B	9 10 39 53	6 01 40 52	07 23 47 21	11 16 15 29	08 07 31 52	07 04 42 06
1773	9 10 25 33	6 01 25 29	00 03 10 24	00 26 55 19	11 06 15 05	06 15 22 23
1774	9 10 11 13	6 01 10 06	04 12 33 28	02 07 35 10	02 04 58 18	05 26 02 40
1775	9 09 56 54	6 00 54 44	08 21 56 31	03 18 15 00	05 03 41 31	05 06 42 57
1776 B	9 10 41 42	6 01 38 29	01 14 30 10	04 29 01 32	08 15 28 38	04 17 20 03

EPOQUES POUR LES CALCULS DE LA LUNE.

N. B. Ces Epoques ſont conformes à celles des *Inſtitutions Aſtronomiques*, avec cette ſeule différence, qu'on a ajouté 15″ à la longitude moyenne de la Lune.

Années.	Longitude moyenne du Soleil.	Anomalie moyenne du Soleil.	Longitude moyenne de la Lune.	Longitude moyenne de ſon Apogée.	Anomalie moyenne de la Lune.	Nœud aſcendant rétrograde.
	Sig. D. M. S.	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*
1777	9 10 27 22	6 01 23 06	05 23 53 13	06 09 41 22	11 14 11 51	03 28 00 20
1778	9 10 13 02	6 01 07 43	10 03 16 17	07 20 21 13	02 12 55 04	03 08 40 37
1779	9 09 58 42	6 00 52 20	02 12 39 20	09 01 01 03	05 11 38 17	02 19 20 54
1780 B	9 10 43 31	6 01 36 06	07 05 12 59	10 11 47 35	08 23 25 24	01 29 58 01
1781	9 10 29 11	6 01 20 43	11 14 36 02	11 22 27 25	11 22 08 37	01 10 38 18
1782	9 10 14 51	6 01 05 20	03 23 59 06	01 03 07 16	02 20 51 50	00 21 18 35
1783	9 10 00 31	6 00 49 57	08 03 22 09	02 13 47 06	05 19 35 03	00 02 08 52
1784 B	9 10 45 20	6 01 33 43	00 25 55 48	03 24 33 38	09 01 21 10	11 12 35 57
1785	9 10 31 00	6 01 18 20	05 05 18 51	05 05 13 28	00 00 05 23	10 23 16 14
1786	9 10 16 40	6 01 02 57	09 14 41 55	06 15 53 19	02 28 48 36	10 03 56 31
1787	9 10 02 20	6 00 47 34	01 24 04 58	07 26 33 09	05 27 31 49	09 14 36 48
1788 B	9 10 47 09	6 01 31 20	06 16 38 37	09 07 19 41	09 09 18 56	08 25 13 54
1789	9 10 32 49	6 01 15 57	10 26 01 40	10 17 59 31	00 08 02 09	08 05 54 11
1790	9 10 18 29	6 01 00 34	03 05 24 44	11 28 39 22	03 06 45 22	07 16 34 28
1791	9 10 04 09	6 00 45 11	07 14 47 47	01 09 19 12	06 05 28 35	06 27 14 45
1792 B	9 10 48 57	6 01 28 56	00 07 21 26	02 20 05 44	09 17 15 42	06 07 51 51
1793	9 10 34 37	6 01 13 33	04 16 44 29	04 00 45 34	00 15 58 55	05 18 32 08
1794	9 10 20 17	6 00 53 10	08 26 07 33	05 11 25 25	03 14 42 08	04 29 12 25
1795	9 10 05 57	6 00 42 47	01 05 30 36	06 22 05 15	06 13 25 21	04 09 52 42
1796 B	9 10 50 46	6 01 26 33	05 28 04 15	08 02 51 47	09 25 12 28	03 20 29 48
1797	9 10 36 26	6 01 11 10	10 07 27 18	09 13 31 37	00 23 55 41	03 01 10 05
1798	9 10 22 06	6 00 55 47	02 16 50 22	10 24 11 29	03 22 38 53	02 11 50 22
1799	9 10 07 46	6 00 40 24	06 26 13 25	00 04 51 19	06 21 22 06	01 22 30 39
1800 B	9 10 52 35	6 01 24 10	11 18 47 04	01 15 37 50	10 03 09 14	01 03 07 46

MOYENS MOUVEMENS DU SOLEIL ET DE LA LUNE.

pour le dernier jour de chaque mois.

Mois.	Longitude moyenne du Soleil.	Anomalie moyenne du Soleil.	Longitude moyenne de la Lune.	Longitude moyenne de l'Apogée.	Anomalie moyenne de la Lune.	Nœud ascendant rétrograde.
	S. D. M. S.	*S. D. M. S.*	*S. D. M. S.*	*S. D. M. S.*	*S. D. M. S.*	*S. D. M. S.*
Janvier	01 00 33 18	01 00 33 13	01 18 28 06	0 03 27 13	01 15 00 53	0 01 38 30
Février	01 28 09 11	01 28 09 01	01 27 24 26	0 06 34 23	01 20 50 03	0 03 07 28
Mars	02 28 42 30	02 28 42 14	03 15 52 32	0 10 01 37	03 05 50 55	0 04 45 57
Avril	03 28 16 39	03 28 16 18	04 11 10 03	0 13 22 09	04 07 47 54	0 06 21 17
Mai	04 28 49 58	04 28 49 32	06 09 38 08	0 16 49 22	05 22 48 46	0 07 59 47
Juin	05 28 24 08	05 28 23 37	07 14 55 39	0 20 09 55	06 24 45 44	0 09 35 06
Juillet	06 28 57 26	06 28 56 49	09 03 23 45	0 23 37 08	08 09 46 37	0 11 13 35
Août	07 29 30 44	07 29 30 02	10 21 51 51	0 27 04 21	09 24 47 30	0 12 52 05
Septem.	08 29 04 54	08 29 04 07	11 17 09 21	01 00 24 53	10 26 44 28	0 14 27 24
Octob.	09 29 38 12	09 29 37 20	01 15 37 27	01 03 52 07	00 11 45 20	0 16 05 53
Nov.	10 29 12 22	10 29 11 24	02 20 54 58	01 07 12 39	01 13 42 19	0 17 41 12
Décem.	11 29 45 40	11 29 44 37	04 09 23 04	01 10 39 52	02 28 43 12	0 19 19 43

MOYENS MOUVEMENS DU SOLEIL ET DE LA LUNE pour les jours du Mois (a).

Jours.	Longitude moyenne du Soleil.	Anomalie moyenne du Soleil.	Longitude moyenne de la Lune.	Longitude moyenne de l'Apogée.	Anomalie moyenne de la Lune.	Nœud ascendant rétrograde.
	S. D. M. S.	S. D. M. S.	S. D. M. S.	S. D. M. S.	S. D. M. S.	S. D. M. S.
1	00 00 59 08	00 00 59 08	00 13 10 35	00 00 06 41	00 13 03 54	00 00 03 11
2	00 01 58 17	00 01 58 17	00 26 21 10	00 00 13 22	00 26 07 48	00 00 06 21
3	00 02 57 25	00 02 57 25	01 09 31 45	00 00 20 03	01 09 11 42	00 00 09 32
4	00 03 56 33	00 03 56 33	01 22 42 20	00 00 26 44	01 22 15 36	00 00 12 43
5	00 04 55 42	00 04 55 42	02 05 52 55	00 00 33 25	02 05 19 30	00 00 15 53
6	00 05 54 50	00 05 54 49	02 19 03 30	00 00 40 06	02 18 23 24	00 00 19 04
7	00 06 53 58	00 06 53 57	03 02 14 05	00 00 46 48	03 01 27 17	00 00 22 14
8	00 07 53 07	00 07 53 06	03 15 24 40	00 00 53 29	03 14 31 11	00 00 25 25
9	00 08 52 15	00 08 52 14	03 28 35 15	00 01 00 10	03 27 35 05	00 00 28 36
10	00 09 51 23	00 09 51 22	04 11 45 50	00 01 06 51	04 10 38 59	00 00 31 46
11	00 10 50 32	00 10 50 30	04 24 56 25	00 01 13 32	04 23 42 53	00 00 34 57
12	00 11 49 40	00 11 49 38	05 08 07 00	00 01 20 13	05 06 46 47	00 00 38 08
13	00 12 48 48	00 12 48 46	05 21 17 35	00 01 26 54	05 19 50 41	00 00 41 18
14	00 13 47 57	00 13 47 55	06 04 28 10	00 01 33 35	06 02 54 35	00 00 44 29
15	00 14 47 05	00 14 47 03	06 17 38 45	00 01 40 16	06 15 58 29	00 00 47 40
16	00 15 46 13	00 15 46 11	07 00 49 20	00 01 46 57	06 29 02 23	00 00 50 50
17	00 16 45 22	00 16 45 19	07 13 59 55	00 01 53 38	07 12 06 17	00 00 54 01
18	00 17 44 30	00 17 44 27	07 27 10 30	00 02 00 19	07 25 10 11	00 00 57 11
19	00 18 43 38	00 18 43 35	08 10 21 05	00 02 07 00	08 08 14 05	00 01 00 22
20	00 19 42 47	00 19 42 44	08 23 31 40	00 02 13 41	08 21 17 59	00 01 03 33
21	00 20 41 55	00 20 41 52	09 06 42 15	00 02 20 23	09 04 21 52	00 01 06 43
22	00 21 41 03	00 21 41 00	09 19 52 50	00 02 27 04	09 17 25 46	00 01 09 54
23	00 22 40 12	00 22 40 08	10 03 03 26	00 02 33 45	10 00 29 41	00 01 13 05
24	00 23 39 20	00 23 39 16	10 16 14 01	00 02 40 26	10 13 33 35	00 01 16 15
25	00 24 38 28	00 24 38 24	10 29 24 36	00 02 47 07	10 26 37 29	00 01 19 26
26	00 25 37 37	00 25 37 33	11 12 35 11	00 02 53 48	11 09 41 23	00 01 22 37
27	00 26 36 45	00 26 36 41	11 25 45 46	00 03 00 29	11 22 45 17	00 01 25 47
28	00 27 35 53	00 27 35 49	00 08 56 21	00 03 07 10	00 05 49 11	00 01 28 58
29	00 28 35 02	00 28 34 57	00 22 06 56	00 03 13 51	00 18 53 05	00 01 32 09
30	00 29 34 10	00 29 35 05	01 05 17 31	00 03 20 32	01 01 56 59	00 01 35 19
31	01 00 33 18	01 00 33 13	01 18 28 06	00 03 27 13	01 15 00 53	00 01 38 30

(a) Dans les années Biſſextiles, il faut retrancher un jour de la date du mois, ſi cette date tombe dans les mois de Janvier ou de Février. Par exemple, ſi on demande le lieu de la Lune le 31 Janvier dans une année Biſſextile, ou le 10 Février, il faudra prendre le lieu qui répond au 30 Janvier, ou au 9 Février.

MOYENS MOUVEMENS DU SOLEIL ET DE LA LUNE, pour les Heures, Minutes & Secondes.

N. B. Pour les Heures, Minutes & Secondes, le mouvement de l'Apogée du Soleil eſt inſenſible. C'eſt pourquoi dans les deux Tables ſuivantes l'Anomalie moyenne du Soleil eſt toujours égale à la longitude moyenne de cet Aſtre.

	Longitude moy. du Soleil.	Anomalie moy. du Soleil.	Longitude moy. de la Lune.	Longitude moy. de l'Apogée.	Anomalie moy. de la Lune.	Nœud aſcendant rétrograde.
Secondes.	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*
Minutes.	*M. S. T.*	*M. S. T.*	*M. S. T.*	*M. S. T.*	*M. S. T.*	*M. S. T.*
Heures.	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*
1	00 02 28	00 02 28	00 32 56	00 00 17	00 32 40	00 00 08
2	00 04 56	00 04 56	01 05 53	00 00 33	01 05 20	00 00 16
3	00 07 24	00 07 24	01 38 49	00 00 50	01 37 59	00 00 24
4	00 09 51	00 09 51	02 11 46	00 01 07	02 10 39	00 00 32
5	00 12 19	00 12 19	02 44 42	00 01 24	02 43 18	00 00 40
6	00 14 47	00 14 47	03 17 39	00 01 40	03 15 59	00 00 48
7	00 17 15	00 17 15	03 50 35	00 01 57	03 48 38	00 00 56
8	00 19 43	00 19 43	04 23 32	00 02 14	04 21 18	00 01 04
9	00 22 11	00 22 11	04 56 28	00 02 30	04 53 58	00 01 12
10	00 24 38	00 24 38	05 29 24	00 02 47	05 26 37	00 01 19
11	00 27 06	00 27 06	06 02 21	00 03 04	05 59 17	00 01 27
12	00 29 34	00 29 34	06 35 18	00 03 20	06 31 58	00 01 35
13	00 32 02	00 32 02	07 08 14	00 03 37	07 04 37	00 01 43
14	00 34 30	00 34 30	07 41 10	00 03 54	07 37 16	00 01 51
15	00 36 58	00 36 58	08 14 07	00 04 11	08 09 56	00 01 59
16	00 39 25	00 39 25	08 47 03	00 04 27	08 42 36	00 02 07
17	00 41 53	00 41 53	09 20 00	00 04 44	09 15 16	00 02 15
18	00 44 21	00 44 21	09 52 56	00 05 01	09 47 55	00 02 23
19	00 46 49	00 46 49	10 25 53	00 05 18	10 20 35	00 02 31
20	00 49 17	00 49 17	10 58 49	00 05 34	10 53 15	00 02 39
21	00 51 45	00 51 45	11 31 46	00 05 51	11 25 55	00 02 47
22	00 54 12	00 54 12	12 04 42	00 06 08	11 58 34	00 02 55
23	00 56 40	00 56 40	12 37 39	00 06 24	12 31 15	00 03 03
24	00 59 08	00 59 08	13 10 35	00 06 41	13 03 54	00 03 11
25	01 01 36	01 01 36	13 43 32	00 06 58	13 36 34	00 03 19
26	01 04 04	01 04 04	14 16 28	00 07 14	14 09 14	00 03 27
27	01 06 32	01 06 32	14 49 24	00 07 31	14 41 53	00 03 35
28	01 09 00	01 09 00	15 22 21	00 07 48	15 14 33	00 03 43
29	01 11 27	01 11 27	15 55 18	00 08 05	15 47 13	00 03 51
30	01 13 55	01 13 55	16 28 14	00 08 21	16 19 53	00 03 59

SUITE de la Table des Moyens Mouvemens du Soleil & de la Lune, pour les Heures, Minutes & Secondes.

	Longitude moyenne du Soleil.	Anomalie moyenne du Soleil.	Longitude moyenne de la Lune.	Longitude moyenne de l'Apogée.	Anomalie moyenne de la Lune.	Nœud ascendant rétrograde.
Secondes.	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*	*S. T. Q.*
Minutes.	*M. S. T.*	*M. S. T.*	*M. S. T.*	*M. S. T.*	*M. S. T.*	*M. S. T.*
31	01 16 23	01 16 23	17 01 10	00 08 38	16 52 32	00 00 04
32	01 18 51	01 18 51	17 34 07	00 08 55	17 25 12	00 00 04
33	01 21 19	01 21 19	18 07 03	00 09 11	17 57 52	00 00 04
34	01 23 47	01 23 47	18 39 59	00 09 28	18 30 31	00 00 04
35	01 26 14	01 26 14	19 12 55	00 09 44	19 03 11	00 00 05
36	01 28 42	01 28 42	19 45 52	00 10 01	19 35 51	00 00 05
37	01 31 10	01 31 10	20 18 48	00 10 17	20 08 31	00 00 05
38	01 33 38	01 33 38	20 51 45	00 10 35	20 41 10	00 00 05
39	01 36 06	01 36 06	21 24 41	00 10 51	21 13 50	00 00 05
40	01 38 34	01 38 34	21 57 38	00 11 08	21 46 30	00 00 05
41	01 41 01	01 41 01	22 30 34	00 11 24	22 19 10	00 00 06
42	01 43 29	01 43 29	23 03 31	00 11 42	22 51 49	00 00 06
43	01 45 57	01 45 57	23 36 27	00 11 58	23 24 29	00 00 06
44	01 48 25	01 48 25	24 09 24	00 12 15	23 57 09	00 00 06
45	01 50 53	01 50 53	24 42 20	00 12 31	24 29 49	00 00 06
46	01 53 21	01 53 21	25 15 17	00 12 49	25 02 28	00 00 06
47	01 55 48	01 55 48	25 48 13	00 13 05	25 35 08	00 00 06
48	01 58 16	01 58 16	26 21 10	00 13 22	26 07 48	00 00 06
49	02 00 44	02 00 44	26 54 06	00 13 38	26 40 28	00 00 06
50	02 03 12	02 03 12	27 27 03	00 13 56	27 13 07	00 00 07
51	02 05 40	02 05 40	27 59 59	00 14 12	27 45 47	00 00 07
52	02 08 08	02 08 08	28 32 56	00 14 29	28 18 27	00 00 07
53	02 10 36	02 10 36	29 05 52	00 14 45	28 51 07	00 00 07
54	02 13 03	02 13 03	29 38 49	00 15 03	29 23 46	00 00 07
55	02 15 31	02 15 31	30 11 45	00 15 19	29 56 26	00 00 07
56	02 17 59	02 17 59	30 44 42	00 15 36	30 29 06	00 00 07
57	02 20 27	02 20 27	31 17 38	00 15 52	31 01 46	00 00 08
58	02 22 55	02 22 55	31 50 34	00 16 09	31 34 25	00 00 08
59	02 25 23	02 25 23	32 23 31	00 16 26	32 07 05	00 00 08
60	02 27 50	02 27 50	32 56 27	00 16 42	32 39 45	00 00 08

ARG. I. *Anomalie moyenne du Soleil.*

Ajoutez en deſcendant.

☉. I. II.

Otez en deſcendant.

	V I.	V I I.	V I I I.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0 00	5 38	9 51	30
1	0 12	5 49	9 58	29
2	0 24	6 00	10 4	28
3	0 36	6 09	10 10	27
4	0 47	6 19	10 15	26
5	0 59	6 29	10 20	25
6	1 10	6 39	10 25	24
7	1 22	6 49	10 30	23
8	1 34	6 58	10 35	22
9	1 46	7 8	10 39	21
10	1 58	7 16	10 44	20
11	2 8	7 25	10 48	19
12	2 20	7 34	10 52	18
13	2 31	7 43	10 57	17
14	2 42	7 51	11 2	16
15	2 54	8 0	11 4	15
16	3 5	8 9	11 7	14
17	3 17	8 18	11 10	13
18	3 29	8 26	11 12	12
19	3 40	8 34	11 14	11
20	3 51	8 41	11 17	10
21	4 3	8 49	11 20	9
22	4 14	8 57	11 22	8
23	4 24	9 5	11 24	7
24	4 35	9 13	11 25	6
25	4 46	9 20	11 27	5
26	4 56	9 27	11 28	4
27	5 7	9 32	11 29	3
28	5 18	9 39	11 30	2
29	5 28	9 45	11 31	1
30	5 38	9 51	11 31	0
	V.	I V.	I I I.	

Ajoutez en montant.

X I. X. I X.

Otez en montant.

ARG. II. *Diſtance moyenne du Soleil à l'Apogée moyen de la Lune.*

Otez en deſcendant.

	☉. VI.	I. VII.	II. VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0 0	2 9	2 9	30
1	0 6	2 12	2 6	29
2	0 11	2 14	2 3	28
3	0 17	2 16	2 1	27
4	0 21	2 18	1 58	26
5	0 26	2 20	1 55	25
6	0 32	2 21	1 52	24
7	0 36	2 22	1 48	23
8	0 42	2 23	1 44	22
9	0 46	2 24	1 40	21
10	0 52	2 25	1 36	20
11	0 56	2 26	1 32	19
12	1 1	2 27	1 28	18
13	1 5	2 27	1 23	17
14	1 11	2 28	1 19	16
15	1 14	2 28	1 14	15
16	1 19	2 28	1 11	14
17	1 23	2 27	1 5	13
18	1 28	2 27	1 1	12
19	1 32	2 26	0 56	11
20	1 36	2 25	0 52	10
21	1 40	2 24	0 46	9
22	1 44	2 23	0 42	8
23	1 48	2 22	0 36	7
24	1 52	2 21	0 32	6
25	1 55	2 20	0 26	5
26	1 58	2 18	0 21	4
27	2 1	2 16	0 17	3
28	2 3	2 14	0 11	2
29	2 6	2 12	0 6	1
30	2 9	2 9	0 0	0
	XI. V.	X. IV.	IX. III.	

Ajoutez en montant.

ARG III. Distance moyenne du Soleil au lieu moyen du Nœud.

Otez en descendant.

	☌. VI.	I. VII.	II. VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0 0	1 1	1 1	30
1	2	1 1	1 0	29
2	4	1 3	58	28
3	7	1 4	57	27
4	9	1 4	55	26
5	12	1 5	54	25
6	15	1 6	53	24
7	17	1 6	51	23
8	18	1 6	48	22
9	23	1 7	47	21
10	24	1 8	45	20
11	26	1 8	43	19
12	28	1 8	41	18
13	30	1 8	39	17
14	32	1 8	38	16
15	35	1 8	35	15
16	38	1 8	32	14
17	39	1 8	30	13
18	41	1 8	28	12
19	43	1 8	26	11
20	45	1 8	24	10
21	47	1 7	23	9
22	48	1 6	18	8
23	51	1 6	17	7
24	53	1 6	15	6
25	54	1 5	12	5
26	55	1 4	9	4
27	57	1 4	7	3
28	58	1 3	4	2
29	1 0	1 1	0	1
30	1 1	1 1	0	0
	XI. V.	X. IV.	IX. III.	

Ajoutez en montant.

ARG. IV. Anomalie moyenne de la Lune, plus l'Anomalie moyenne du Soleil.

Otez en descendant.

	☌.	I.	II.	
	VI.	VII.	VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0	47	1 22	30
1	1	48	1 23	29
2	2	50	1 24	28
3	3	51	1 24	27
4	5	52	1 25	26
5	8	54	1 26	25
6	9	55	1 27	24
7	10	56	1 28	23
8	11	58	1 28	22
9	13	59	1 29	21
10	14	1 0	1 30	20
11	17	1 2	1 31	19
12	18	1 2	1 31	18
13	19	1 3	1 32	17
14	21	1 5	1 33	16
15	22	1 6	1 33	15
16	25	1 7	1 34	14
17	26	1 8	1 34	13
18	27	1 9	1 34	12
19	29	1 10	1 35	11
20	30	1 11	1 35	10
21	33	1 13	1 36	9
22	34	1 14	1 36	8
23	35	1 15	1 35	7
24	37	1 16	1 37	6
25	39	1 17	1 37	5
26	42	1 18	1 38	4
27	43	1 19	1 38	3
28	44	1 20	1 38	2
29	46	1 21	1 38	1
30	47	1 22	1 38	0
	V.	IV.	III.	

Otez en montant.

XI. X. IX

Ajoutez en montant.

ARG. V. Anomalie moyenne de la Lune, moins l'Anomalie moyenne du Soleil.

Ajoutez en descendant.

	O°.	I.	II.	
	Otez en descendant.			
	V I.	V II.	V III.	
	M. S.	M. S.	M. S.	
0	0	1 10	2 1	30
1	2	1 12	2 2	29
2	5	1 14	2 4	28
3	7	1 16	2 5	27
4	10	1 18	2 6	26
5	12	1 20	2 7	25
6	15	1 22	2 8	24
7	17	1 24	2 9	23
8	19	1 26	2 10	22
9	22	1 28	2 11	21
10	24	1 30	2 12	20
11	27	1 32	2 12	19
12	29	1 34	2 13	18
13	31	1 35	2 14	17
14	34	1 38	2 15	16
15	36	1 39	2 15	15
16	39	1 41	2 16	14
17	41	1 42	2 16	13
18	43	1 44	2 17	12
19	46	1 46	2 17	11
20	48	1 47	2 18	10
21	50	1 49	2 18	9
22	52	1 50	2 19	8
23	55	1 52	2 19	7
24	57	1 53	2 19	6
25	59	1 55	2 20	5
26	1 2	1 56	2 20	4
27	1 4	1 58	2 20	3
28	1 6	1 59	2 20	2
29	1 8	2 0	2 20	1
30	1 10	2 1	2 20	0
	V.	IV.	III.	

Ajoutez en montant.

XI. X. IX.

Otez en montant.

ARG. VI. Distance moy. de la Lune au Soleil, plus l'Anom. moy. du Soleil.

Otez en descendant.

	O°.	I.	II.	
	Otez en descendant.			
	V I.	V II.	V III.	
	S.	S.	S.	
0	0	9	16	30
1	0	9	16	29
2	0	9	16	28
3	0	10	16	27
4	1	10	16	26
5	1	10	17	25
6	1	10	17	24
7	2	11	17	23
8	2	11	17	22
9	2	11	17	21
10	3	12	17	20
11	3	12	17	19
12	3	12	17	18
13	4	12	17	17
14	4	13	17	16
15	4	13	18	15
16	5	13	18	14
17	5	13	18	13
18	5	13	18	12
19	6	13	18	11
20	6	14	18	10
21	6	14	18	9
22	6	14	18	8
23	7	14	18	7
24	7	14	18	6
25	7	14	18	5
26	8	14	18	4
27	8	15	18	3
28	8	15	18	2
29	9	16	18	1
30	9	16	18	0
	V.	IV.	III.	

Otez en montant.

XI. X. IX.

Ajoutez en montant.

ARG. VII. Double diff. moy. de la Lune au Soleil, plus l'Anom. moy. du Soleil.

Ajoutez en descendant.

	O°.	I.	II.	
	Otez en descendant.			
	V I.	V II.	V III.	
	S.	S.	S.	
0	0	11	20	30
1	0	11	20	29
2	0	12	20	28
3	1	12	20	27
4	1	13	21	26
5	2	13	21	25
6	2	13	21	24
7	2	13	21	23
8	2	14	21	22
9	3	14	21	21
10	3	15	22	20
11	4	15	22	19
12	4	15	22	18
13	5	15	22	17
14	5	16	22	16
15	5	16	22	15
16	6	16	22	14
17	6	17	22	13
18	7	17	23	12
19	7	17	23	11
20	7	17	23	10
21	8	18	23	9
22	8	18	23	8
23	9	18	23	7
24	9	19	23	6
25	9	19	23	5
26	10	19	23	4
27	10	19	23	3
28	11	19	23	2
29	11	20	23	1
30	11	20	23	0
	V.	IV.	III.	

Ajoutez en montant.

XI. X. IX.

Otez en montant.

ARG III. Distance moyenne du Soleil au lieu moyen du Nœud.

Otez en descendant.

	O^c. VI.	I. VII.	II. VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0 0	1 1	1 1	30
1	2	1 1	1 0	29
2	4	1 3	58	28
3	7	1 4	57	27
4	9	1 4	55	26
5	12	1 5	54	25
6	15	1 6	53	24
7	17	1 6	51	23
8	18	1 6	48	22
9	23	1 7	47	21
10	24	1 8	45	20
11	26	1 8	43	19
12	28	1 8	41	18
13	30	1 8	39	17
14	32	1 8	38	16
15	35	1 8	35	15
16	38	1 8	32	14
17	39	1 8	30	13
18	41	1 8	28	12
19	43	1 8	26	11
20	45	1 8	24	10
21	47	1 7	23	9
22	48	1 6	18	8
23	51	1 6	17	7
24	53	1 6	15	6
25	54	1 5	12	5
26	55	1 4	9	4
27	57	1 4	7	3
28	58	1 3	4	2
29	1 0	1 1	0	1
30	1 1	1 1	0	0
	XI. V.	X. IV.	IX. III.	

Ajoutez en montant.

ARG. IV. Anomalie moyenne de la Lune, plus l'Anomalie moyenne du Soleil.

Otez en descendant.

O^c.	I.	II.

Ajoutez en descendant.

	VI.	VII.	VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0	47	1 22	30
1	1	48	1 23	29
2	2	50	1 24	28
3	3	51	1 24	27
4	5	52	1 25	26
5	8	54	1 26	25
6	9	55	1 27	24
7	10	56	1 28	23
8	11	58	1 28	22
9	13	59	1 29	21
10	14	1 0	1 30	20
11	17	1 1	1 31	19
12	18	1 2	1 31	18
13	19	1 3	1 32	17
14	21	1 5	1 33	16
15	22	1 6	1 33	15
16	25	1 7	1 34	14
17	26	1 8	1 34	13
18	27	1 9	1 34	12
19	29	1 10	1 35	11
20	30	1 11	1 35	10
21	33	1 13	1 36	9
22	34	1 14	1 36	8
23	35	1 15	1 36	7
24	37	1 16	1 37	6
25	39	1 17	1 37	5
26	42	1 18	1 38	4
27	43	1 19	1 38	3
28	44	1 20	1 38	2
29	46	1 21	1 38	1
30	47	1 22	1 38	0
	V.	IV.	III.	

Otez en montant.

XI.	X.	IX

Ajoutez en montant.

ARG. V. Anomalie moyenne de la Lune, moins l'Anomalie moyenne du Soleil.

Ajoutez en descendant.

Oc. I. II.

Otez en descendant.

	VI.	VII.	VIII.	
	M. S.	M. S.	M. S.	
0	0	1 10	2 1	30
1	2	1 12	2 2	29
2	5	1 14	2 4	28
3	7	1 16	2 5	27
4	10	1 18	2 6	26
5	12	1 20	2 7	25
6	15	1 22	2 8	24
7	17	1 24	2 9	23
8	19	1 26	2 10	22
9	22	1 28	2 11	21
10	24	1 30	2 12	20
11	27	1 32	2 12	19
12	29	1 34	2 13	18
13	31	1 35	2 14	17
14	34	1 38	2 15	16
15	36	1 39	2 15	15
16	39	1 41	2 16	14
17	41	1 42	2 16	13
18	43	1 44	2 17	12
19	46	1 46	2 17	11
20	48	1 47	2 18	10
21	50	1 49	2 18	9
22	52	1 50	2 19	8
23	55	1 52	2 19	7
24	57	1 53	2 19	6
25	59	1 55	2 20	5
26	1 2	1 56	2 20	4
27	1 4	1 58	2 20	3
28	1 6	1 59	2 20	2
29	1 8	2 0	2 20	1
30	1 10	2 1	2 20	0
	V.	IV.	III.	

Ajoutez en montant.

XI. X. IX.

Otez en montant.

ARG. VI. Distance moy. de la Lune au Soleil, plus l'Anom. moy. du Soleil.

Otez en descendant.

Oc. I. II.

Otez en descendant.

	VI.	VII.	VIII.	
	S.	S.	S.	
0	0	9	16	30
1	0	9	16	29
2	0	9	16	28
3	0	10	16	27
4	1	10	16	26
5	1	10	17	25
6	1	10	17	24
7	2	11	17	23
8	2	11	17	22
9	2	11	17	21
10	3	11	17	20
11	3	11	17	19
12	3	12	17	18
13	4	12	17	17
14	4	13	17	16
15	4	13	18	15
16	5	13	18	14
17	5	13	18	13
18	5	13	18	12
19	6	13	18	11
20	6	14	18	10
21	6	14	18	9
22	6	14	18	8
23	7	14	18	7
24	7	14	18	6
25	7	14	18	5
26	8	14	18	4
27	8	15	18	3
28	8	15	18	2
29	9	16	18	1
30	9	16	18	0
	V.	IV.	III.	

Otez en montant.

XI. X. IX.

Ajoutez en montant.

ARG. VII. Double dist. moy. de la Lune au Soleil, plus l'Anom. moy. du Sol.

Ajoutez en descendant.

Oc. I. II.

Otez en descendant.

	VI.	VII.	VIII.	
	S.	S.	S.	
0	0	11	20	30
1	0	11	20	29
2	0	11	20	28
3	1	12	20	27
4	1	13	21	26
5	2	13	21	25
6	2	13	21	24
7	2	13	21	23
8	2	14	21	22
9	3	14	21	21
10	3	15	22	20
11	4	15	22	19
12	4	15	22	18
13	5	16	22	17
14	5	16	22	16
15	5	16	22	15
16	6	16	22	14
17	6	17	22	13
18	7	17	23	12
19	7	17	23	11
20	7	17	23	10
21	8	18	23	9
22	8	18	23	8
23	9	18	23	7
24	9	19	23	6
25	9	19	23	5
26	10	19	23	4
27	10	19	23	3
28	11	19	23	2
29	11	20	23	1
30	11	20	23	0
	V.	IV.	III.	

Ajoutez en montant.

XI. X. IX.

Otez en montant.

ARG. VIII. Double distance moy. de la Lune au Soleil, moins l'Anomalie moyenne du Soleil.

Otez en descendant.

	☌.	I.	II.	
	Ajoutez en descendant.			
	VI.	VII.	VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0	1 5	1 53	30
1	2	1 7	1 54	29
2	4	1 9	1 55	28
3	7	1 11	1 56	27
4	9	1 13	1 57	26
5	11	1 14	1 58	25
6	13	1 16	1 59	24
7	16	1 18	2 0	23
8	18	1 20	2 1	22
9	20	1 22	2 2	21
10	22	1 23	2 2	20
11	25	1 25	2 3	19
12	27	1 27	2 3	18
13	29	1 29	2 4	17
14	31	1 30	2 5	16
15	34	1 32	2 5	15
16	36	1 34	2 6	14
17	38	1 35	2 7	13
18	40	1 37	2 7	12
19	42	1 38	2 8	11
20	44	1 40	2 8	10
21	47	1 41	2 8	9
22	49	1 42	2 9	8
23	51	1 44	2 9	7
24	53	1 45	2 9	6
25	55	1 47	2 9	5
26	57	1 48	2 10	4
27	59	1 49	2 10	3
28	1 1	1 50	2 10	2
29	1 3	1 52	2 10	1
30	1 5	1 53	2 10	0
	V.	IV.	III.	
	Otez en montant.			
	XI.	X.	IX.	
	Ajoutez en montant.			

ARG. IX. Double distance moyenne de la Lune au Soleil, plus l'Anomalie moyenne de la Lune.

Otez en descendant.

	☌.	I.	II.	
	Ajoutez en descendant.			
	VI.	VII.	VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0	1 30	2 36	30
1	3	1 33	2 37	29
2	6	1 35	2 38	28
3	11	1 38	2 40	27
4	13	1 41	2 41	26
5	15	1 42	2 42	25
6	18	1 45	2 44	24
7	23	1 48	2 45	23
8	26	1 50	2 47	22
9	28	1 53	2 47	21
10	31	1 54	2 48	20
11	35	1 57	2 49	19
12	38	2 0	2 49	18
13	40	2 3	2 51	17
14	43	2 5	2 52	16
15	47	2 7	2 52	15
16	50	2 10	2 53	14
17	53	2 11	2 54	13
18	56	2 14	2 54	12
19	58	2 15	2 55	11
20	1 1	2 18	2 55	10
21	1 5	2 19	2 55	9
22	1 8	2 20	2 56	8
23	1 11	2 23	2 56	7
24	1 14	2 24	2 56	6
25	1 17	2 28	2 57	5
26	1 19	2 30	2 57	4
27	1 21	2 31	2 58	3
28	1 24	2 32	2 58	2
29	1 27	2 33	2 58	1
30	1 30	2 36	2 59	0
	V.	IV.	III.	
	Otez en montant.			
	XI.	X.	IX.	
	Ajoutez en montant.			

ARG. X. *Argument VII, moins l'Anomalie moyenne de la Lune.*

Otez en descendant.

☌. L. II.

Ajoutez en descendant.

D.	VI. M. S.	VII. M. S.	VIII. M. S.	D.
0	0	31	54	30
1	1	32	54	29
2	2	33	55	28
3	3	34	55	27
4	4	35	56	26
5	6	36	56	25
6	7	37	56	24
7	8	38	57	23
8	9	38	57	22
9	10	39	58	21
10	11	40	58	20
11	12	41	58	19
12	13	42	59	18
13	14	42	59	17
14	15	43	1 0	16
15	16	44	1 0	15
16	17	45	1 0	14
17	18	45	1 0	13
18	19	46	1 1	12
19	20	47	1 1	11
20	21	48	1 1	10
21	22	48	1 1	9
22	23	49	1 1	8
23	24	50	1 1	7
24	25	50	1 2	6
25	26	51	1 2	5
26	27	51	1 2	4
27	28	52	1 2	3
28	29	52	1 2	2
29	30	53	1 2	1
30	31	54	1 2	0
	V.	IV.	III.	

Otez en montant.

XI. X. IX.

Ajoutez en montant.

ARG. XI. *Argument VIII, moins l'Anomalie moyenne de la Lune.*

Ajoutez en descendant.

☌. I. IL.

Otez en descendant.

D.	VI. M. S.	VII. M. S.	VIII. M. S.	D.
0	0	1 46	3 3	30
1	3	1 49	3 5	29
2	7	1 52	3 7	28
3	11	1 55	3 9	27
4	15	1 58	3 10	26
5	18	2 1	3 12	25
6	23	2 4	3 13	24
7	26	2 7	3 15	23
8	29	2 10	3 16	22
9	34	2 13	3 18	21
10	37	2 16	3 19	20
11	41	2 19	3 20	19
12	45	2 22	3 21	18
13	48	2 24	3 23	17
14	52	2 28	3 24	16
15	55	2 30	3 25	15
16	59	2 33	3 26	14
17	1 3	2 35	3 27	13
18	1 6	2 37	3 28	12
19	1 10	2 40	3 28	11
20	1 13	2 42	3 29	10
21	1 16	2 45	3 30	9
22	1 20	2 47	3 30	8
23	1 24	2 49	3 31	7
24	1 27	2 51	3 31	6
25	1 30	2 54	3 32	5
26	1 34	2 55	3 32	4
27	1 37	2 58	3 32	3
28	1 40	3 0	3 32	2
29	1 43	3 1	3 32	1
30	1 46	3 3	3 32	0
	V.	IV.	III.	

Ajoutez en montant.

XI. X. IX.

Otez en montant.

ARG XII. Double diſtance moyenne de la Lune au Nœud, moins l'Anomalie moyenne de la Lune.

Ajoutez en deſcendant.

O^c. I. II.

Otez en deſcendant.

	VI.	VII.	VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0	31	54	30
1	1	32	54	29
2	2	33	55	28
3	3	34	55	27
4	4	35	56	26
5	6	36	56	25
6	7	37	56	24
7	8	38	57	23
8	9	38	57	22
9	10	39	58	21
10	11	40	58	20
11	12	41	58	19
12	13	42	59	18
13	14	42	59	17
14	15	43	1 0	16
15	16	44	1 0	15
16	17	45	1 0	14
17	18	45	1 0	13
18	19	46	1 1	12
19	20	47	1 1	11
20	21	48	1 1	10
21	22	48	1 1	9
22	23	49	1 1	8
23	24	50	1 1	7
24	25	50	1 2	6
25	26	51	1 2	5
26	27	51	1 2	4
27	28	52	1 2	3
28	29	52	1 2	2
29	30	53	1 2	1
30	31	54	1 2	0
	V.	IV.	III.	

Ajoutez en montant.

X I. X. I X.

Otez en montant.

ARG. XIII. Argument VII, plus Argument XI.

Otez en deſcendant.

O. I. II.

Ajoutez en deſcendant.

	VI.	VII.	VIII.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	0	36	1 2	30
1	1	37	1 3	29
2	2	38	1 3	28
3	4	39	1 4	27
4	5	40	1 4	26
5	6	41	1 5	25
6	8	42	1 5	24
7	9	43	1 6	23
8	10	44	1 6	22
9	12	45	1 7	21
10	13	46	1 7	20
11	14	47	1 8	19
12	16	48	1 8	18
13	17	49	1 9	17
14	18	50	1 9	16
15	19	51	1 10	15
16	20	52	1 10	14
17	22	52	1 10	13
18	23	53	1 11	12
19	24	54	1 11	11
20	25	55	1 11	10
21	26	56	1 11	9
22	28	56	1 11	8
23	29	57	1 11	7
24	30	58	1 12	6
25	31	59	1 12	5
26	32	59	1 12	4
27	33	1 0	1 12	3
28	34	1 1	1 12	2
29	35	1 1	1 12	1
30	36	1 2	1 12	0
	V.	IV.	III.	

Otez en montant.

X I. X. I X.

Ajoutez en montant.

ARGUMENT XIV.

EQUATION DU CENTRE.

ANOMALIE MOYENNE DE LA LUNE + A.

N. B. J'appelle *A* la somme des Equations précédentes.

Otez en descendant.

	0.		*I.*		*II.*		
		Differ.		Differ.		Differ.	
D.	*D. M. S.*	*M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*D.*
0	0 0 0		2 58 22		5 16 8		30
		6 11		5 28		3 27	
1	0 6 11		3 3 50		5 19 35		29
		6 10		5 24		3 22	
2	12 21		3 9 14		5 22 57		28
		6 10		5 22		3 17	
3	18 31		3 14 36		5 26 14		27
		6 10		5 18		3 11	
4	24 41		3 19 54		5 29 25		26
		6 10		5 17		3 7	
5	30 51		3 25 11		5 32 32		25
		6 9		5 14		3 1	
6	37 0		3 30 25		5 35 33		24
		6 8		5 10		2 55	
7	43 8		3 35 35		5 38 28		23
		6 8		5 6		2 49	
8	49 16		3 40 41		5 41 17		22
		6 7		5 3		2 43	
9	55 23		3 45 44		5 44 0		21
		6 7		4 58		2 36	
10	1 1 30		3 50 42		5 46 36		20
		6 5		4 56		2 31	
11	1 7 35		3 55 38		5 49 7		19
		6 5		4 52		2 26	
12	1 13 40		4 0 30		5 51 33		18
		6 2		4 49		2 20	
13	1 19 42		4 5 19		5 53 53		17
		6 2		4 44		2 14	
14	1 25 44		4 10 3		5 56 7		16
		6 2		4 41		2 8	
15	1 31 46		4 14 44		5 58 15		15
		5 59		4 37		2 2	
16	1 37 45		4 19 21		6 0 17		14
		5 58		4 32		1 55	
17	1 43 43		4 23 53		6 2 12		13
		5 56		4 28		1 49	
18	1 49 39		4 28 21		6 4 1		12
		5 55		4 24		1 43	
19	1 55 34		4 32 45		6 5 44		11
		5 53		4 20		1 36	
20	2 1 27		4 37 5		6 7 20		10
		5 50		4 15		1 30	
21	2 7 17		4 41 20		6 8 50		9
		5 49		4 11		1 24	
22	2 13 6		4 45 31		6 10 14		8
		5 46		4 6		1 18	
23	2 18 52		4 49 37		6 11 32		7
		5 46		4 1		1 10	
24	2 24 38		4 53 38		6 12 42		6
		5 44		3 58		1 5	
25	2 30 22		4 57 36		6 13 47		5
		5 41		3 53		0 58	
26	2 36 3		5 1 29		6 14 45		4
		5 38		3 48		0 51	
27	2 41 41		5 5 17		6 15 36		3
		5 34		3 43		0 44	
28	2 47 15		5 9 0		6 16 20		2
		5 35		3 36		0 37	
29	2 52 50		5 12 36		6 16 57		1
		5 31		3 32		0 30	
30	2 58 21		5 16 8		6 17 27		0
	XI.		*X.*		*IX.*		

Ajoutez en montant

ARGUMENT XIV.

EQUATION DU CENTRE.

ANOMALIE MOYENNE DE LA LUNE + A.

Otez en deſcendant.

	III.		IV.		V.		
		Differ.		Differ.		Differ.	
D.	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	M. S.	D.
0	6 17 27		5 38 40		3 20 53		30
		24		7		6 0	
1	6 17 51	17	5 35 33	12	3 14 53	3	29
2	6 18 8	10	5 31 21	20	3 8 50	6	28
3	6 18 18	3	5 29 1	27	3 2 44	6	27
4	6 18 21	4	5 25 34	32	2 56 33	6 11	26
5	6 18 17	11	5 22 2	39	2 50 19	6 14	25
6	6 18 6	18	5 18 23	45	2 44 0	6 19	24
7	6 17 48	25	5 14 38	52	2 37 38	6 22	23
8	6 17 23	32	5 10 46	59	2 31 13	6 25	22
9	6 16 51	38	5 6 47	5	2 24 43	6 30	21
10	6 16 13	46	5 2 42	12	2 18 11	6 32	20
11	6 15 27	53	4 58 30	18	2 11 35	6 36	19
12	6 14 34	59	4 54 12	24	2 4 57	6 38	18
13	6 13 35	7	4 49 48	28	1 58 17	6 40	17
14	6 12 28	14	4 45 20	35	1 51 33	6 44	16
15	6 11 14	21	4 40 45	41	1 44 47	6 46	15
16	6 9 53	28	4 36 4	46	1 37 58	6 49	14
17	6 8 25	35	4 31 18	54	1 31 7	6 51	13
18	6 6 50	43	4 26 24	59	1 24 14	6 53	12
19	6 5 7	50	4 21 25	6	1 17 19	6 55	11
20	6 3 17	56	4 16 19	10	1 10 24	6 55	10
21	6 1 21	05	4 11 9	16	1 3 26	6 58	9
22	5 59 17	10	4 5 53	20	56 28	6 58	8
23	5 57 7	17	4 0 33	25	49 27	7 1	7
24	5 54 50	25	3 55 8	30	42 25	7 2	6
25	5 52 25	30	3 49 38	35	35 21	7 3	5
26	5 49 55	37	3 44 3	39	28 18	7 3	4
27	5 47 18	41	3 38 24	46	21 14	7 4	3
28	5 44 27	47	3 32 38	49	14 10	7 4	2
29	5 41 40	3 0	3 26 49	56	7 5	7 5	1
30	5 38 40		3 20 53		0 0	7 5	0
	VIII.		VII.		VI.		

Ajoutez en montant.

ARGUMENT XV.

VARIATION.

DISTANCE MOYENNE DE LA LUNE AU SOLEIL, + A.

	O.		Differ.	I.		Differ.	II.		Differ.	
D.	M.	S.	M. S.	M.	S.	M. S.	M.	S.	M. S.	D.
0	+ 0	0		+ 34	14		+ 32	46		30
1	+ 1	23	1 23	+ 34	48	34	+ 31	59	47	29
2	+ 2	46	1 23	+ 35	20	37	+ 31	12	47	28
3	+ 4	9	1 23	+ 35	51	33	+ 30	23	49	27
4	+ 5	31	1 22	+ 36	21	29	+ 29	32	0 51	26
5	+ 6	53	1 22	+ 36	49	28	+ 28	39	0 53	25
6	+ 8	14	1 21	+ 37	14	25	+ 27	43	0 56	24
7	+ 9	34	1 20	+ 37	36	22	+ 26	43	1 0	23
8	+ 10	43	1 19	+ 37	54	18	+ 25	42	1 1	22
9	+ 12	1	1 18	+ 38	11	17	+ 24	40	1 2	21
10	+ 13	26	1 15	+ 38	24	13	+ 23	36	1 4	20
11	+ 14	41	1 15	+ 38	34	10	+ 22	31	1 5	19
12	+ 15	55	1 14	+ 38	42	8	+ 21	24	1 7	18
13	+ 17	18	1 13	+ 38	45	3	+ 20	16	1 8	17
14	+ 18	31	1 13	+ 38	46	1	+ 19	4	1 12	16
15	+ 19	41	1 10	+ 38	45	1	+ 17	51	1 13	15
16	+ 21	1	1 10	+ 38	41	4	+ 16	37	1 14	14
17	+ 22	9	1 8	+ 38	32	9	+ 15	23	1 14	13
18	+ 23	17	1 8	+ 38	21	11	+ 14	7	1 16	12
19	+ 24	23	1 6	+ 38	6	15	+ 13	50	1 17	11
20	+ 25	26	1 3	+ 37	48	18	+ 11	32	1 18	10
21	+ 26	30	1 4	+ 37	28	20	+ 9	14	1 18	9
22	+ 27	30	1 0	+ 37	6	22	+ 8	54	1 20	8
23	+ 28	28	0 58	+ 36	42	24	+ 7	33	1 21	7
24	+ 29	24	0 56	+ 36	15	27	+ 6	12	1 21	6
25	+ 30	18	0 54	+ 35	54	31	+ 4	50	1 22	5
26	+ 31	10	0 52	+ 35	21	33	+ 3	27	1 23	4
27	+ 32	0	0 50	+ 34	46	35	+ 2	04	1 23	3
28	+ 32	48	0 48	+ 34	10	36	+ 0	41	1 23	2
29	+ 33	34	0 46	+ 33	29	41	— 0	42	1 23	1
30	+ 34	14	40	+ 32	46	43	— 2	5	1 23	0
	XI.			X.			IX.			

Signe contraire en montant.

ARGUMENT XV.

VARIATION.

DISTANCE MOYENNE DE LA LUNE AU SOLEIL, + A.

	III.		Differ.		IV.		Differ.	V.		Differ.		
D.	M.	S.	M.	S.	M.	S.	M. S.	M.	S.	M.	S.	
0	— 2	5			— 36	28		— 36	10			30
			1	23			39			44		
1	— 3	28			— 37	7		— 35	26			29
			1	23			39			47		
2	— 4	51			— 37	46		— 34	39			28
			1	22			34			48		
3	— 6	13			— 38	20		— 33	51			27
			1	21			31			50		
4	— 7	34			— 38	51		— 33	01			26
			1	21			31			52		
5	— 8	55			— 39	22		— 32	9			25
			1	20			27			59		
6	— 10	15			— 39	49		— 31	10			24
			1	20			24			1	0	
7	— 11	35			— 40	3		— 30	10			23
			1	20			24			1	4	
8	— 12	55			— 40	37		— 29	6			22
			1	19			23			1	4	
9	— 14	14			— 40	50		— 28	2			21
			1	19			15			1	6	
10	— 15	33			— 41	5		— 26	56			20
			1	18			13			1	7	
11	— 16	51			— 41	18		— 25	49			19
			1	17			13			1	12	
12	— 18	8			— 41	31		— 24	37			18
			1	16			7			1	12	
13	— 19	24			— 41	38		— 23	25			17
			1	15			7			1	12	
14	— 20	39			— 41	45		— 22	13			16
			1	12			0			1	17	
15	— 21	51			— 41	45		— 20	56			15
			1	11			1			1	14	
16	— 23	02			— 41	44		— 19	42			14
			1	10			6			1	20	
17	— 24	12			— 41	38		— 18	22			13
			1	10			4			1	20	
18	— 25	22			— 41	34		— 17	2			12
			1	7			12			1	21	
19	— 26	29			— 41	22		— 15	41			11
			1	5			14			1	21	
20	— 27	34			— 41	8		— 14	20			10
			1	2			17			1	23	
21	— 28	36			— 40	51		— 12	59			9
			1	0			19			1	23	
22	— 29	36			— 40	32		— 11	36			8
			0	59			22			1	24	
23	— 30	35			— 40	10		— 10	12			7
			0	58			26			1	25	
24	— 31	33			— 39	44		— 8	47			6
			0	56			29			1	26	
25	— 32	29			— 39	15		— 7	21			5
			0	51			32			1	27	
26	— 33	20			— 38	43		— 5	54			4
				51			33			1	27	
27	— 34	11			— 38	10		— 4	27			3
				46			37			1	28	
28	— 34	57			— 37	33		— 2	59			2
				46			40			1	28	
29	— 35	43			— 36	53		— 1	31			1
				45			43			1	31	
30	— 36	28			— 36	10		— 0	0			0
	VIII.				VII.			VI.				

Signe contraire en montant.

ARGUMENT XVI.

DOUBLE ARGUMENT XV,

moins l'anomalie moyenne de la Lune.

Otez en deſcendant.

	0.		I.		II.		
		Differ.		Differ.		Differ.	
D.	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	M. S.	D.
0	0 0		37 48		1 6 1		30
		1 20		1 10		40	
1	1 20		38 58		1 6 41		29
		1 20		1 9		38	
2	2 40		40 7		1 7 19		28
		1 19		1 8		38	
3	3 59		41 15		1 7 57		27
		1 19		1 7		37	
4	5 18		42 22		1 8 34		26
		1 18		1 6		35	
5	6 36		43 28		1 9 9		25
		1 18		1 5		34	
6	7 54		44 33		1 9 43		24
		1 18		1 5		33	
7	9 12		45 38		1 10 16		23
		1 18		1 3		32	
8	10 30		46 41		1 10 48		22
		1 18		1 2		30	
9	11 48		47 43		1 11 18		21
		1 18		1 2		30	
10	13 06		48 45		1 11 48		20
		1 18		1 0		30	
11	14 24		49 47		1 12 18		19
		1 18		0 58		27	
12	15 42		50 47		1 12 45		18
		1 17		0 59		25	
13	16 59		51 45		1 13 10		17
		1 17		0 57		23	
14	18 16		52 44		1 13 33		16
		1 16		0 57		23	
15	19 32		53 41		1 13 56		15
		1 16		0 55		23	
16	20 48		54 38		1 14 19		14
		1 16		0 54		21	
17	22 4		55 33		1 14 41		13
		1 16		0 54		18	
18	23 20		56 27		1 14 59		12
		1 15		0 53		18	
19	24 35		57 21		1 15 17		11
		1 15		0 51		17	
20	25 50		58 14		1 15 34		10
		1 14		0 51		15	
21	27 4		59 5		1 15 49		9
		1 13		0 49		12	
22	28 17		59 56		1 16 1		8
		1 13		48		12	
23	29 30		1 0 45		1 16 13		7
		1 12		48		12	
24	30 42		1 1 33		1 16 25		6
		1 12		47		10	
25	31 54		1 2 21		1 16 35		5
		1 11		46		8	
26	33 5		1 3 8		1 16 43		4
		1 11		44		6	
27	34 16		1 3 54		1 16 49		3
		1 11		42		5	
28	35 27		1 4 38		1 16 54		2
		1 11		41		4	
29	36 38		1 5 20		1 16 58		1
		1 10				2	
30	37 48		1 6 1		1 17 0		0
	XI.		X.		IX.		

Ajoutez en montant

ARGUMENT XVI.

DOUBLE ARGUMENT XV,

moins l'Anomalie moyenne de la Lune.

Otez en deſcendant.

	III.		IV.		V.		
		Differ.		Differ.		Differ.	
D.	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	M. S.	D.
0	1 17 0	0 0	1 7 21	0 41	0 39 09	1 10	30
1	1 17 0	0 0	1 6 40	0 42	37 59	1 11	29
2	1 17 0	0 2	1 5 58	0 42	36 48	1 11	28
3	1 16 58	0 3	1 5 16	0 44	35 37	1 12	27
4	1 16 55	0 4	1 4 32	0 45	34 25	1 12	26
5	1 16 51	0 8	1 3 47	0 46	33 13	1 13	25
6	1 16 43	0 8	1 3 1	0 48	32 00	1 14	24
7	1 16 35	0 8	1 2 13	0 49	30 46	1 15	23
8	1 16 27	0 10	1 1 24	0 49	29 31	1 16	22
9	1 16 17	0 11	1 0 35	0 51	28 15	1 17	21
10	1 16 6	0 15	59 44	0 53	26 58	1 17	20
11	1 15 51	0 15	58 51	0 53	25 41	1 18	19
12	1 15 36	0 15	57 58	0 53	24 23	1 19	18
13	1 15 21	0 17	57 5	0 55	23 04	1 20	17
14	1 15 4	0 19	56 10	0 57	21 44	1 20	16
15	1 14 45	0 21	55 13	0 57	20 24	1 20	15
16	1 14 24	0 22	54 16	0 59	19 04	1 21	14
17	1 14 2	0 23	53 17	0 58	17 43	1 21	13
18	1 13 39	0 23	52 19	1 2	16 22	1 21	12
19	1 13 16	0 25	51 17	1 2	15 01	1 21	11
20	1 12 51	0 26	50 15	1 2	13 40	1 21	10
21	1 12 25	0 30	49 13	1 3	12 19	1 22	9
22	1 11 55	0 31	48 10	1 4	10 57	1 22	8
23	1 11 24	0 31	47 6	1 6	9 35	1 22	7
24	1 10 53	0 32	46 0	1 6	8 13	1 22	6
25	1 10 21	0 33	44 54	1 7	6 51	1 22	5
26	1 9 48	0 35	43 47	1 9	5 29	1 22	4
27	1 9 13	0 36	42 38	1 9	4 07	1 22	3
28	1 8 37	0 36	41 29	1 10	2 45	1 22	2
29	1 8 1	0 40	40 19	1 10	1 23	1 22	1
30	1 7 21		39 9		0 0	1 22	0
	VIII.		VII.		VI.		

Ajoutez en montant.

REDUCTION A L'ECLIPTIQUE.

Longitude vraie de la Lune, moins la longitude moyenne du Nœud.

Otez en descendant.

	☌. VI.		I. VII.		II. VIII.		
D.	*M.*	*S.*	*M.*	*S.*	*M.*	*S.*	*D.*
0	0	0	5	59	5	59	30
1	0	14	6	7	5	52	29
2	0	29	6	13	5	44	28
3	0	43	6	19	5	36	27
4	0	58	6	26	5	27	26
5	1	12	6	31	5	18	25
6	1	26	6	36	5	7	24
7	1	40	6	40	4	57	23
8	1	54	6	44	4	47	22
9	2	8	6	47	4	37	21
10	2	21	6	50	4	27	20
11	2	34	6	52	4	16	19
12	2	47	6	54	4	3	18
13	3	1	6	55	3	52	17
14	3	14	6	56	3	40	16
15	3	27	6	56	3	27	15
16	3	40	6	56	3	14	14
17	3	52	6	55	3	1	13
18	4	3	6	54	2	47	12
19	4	16	6	52	2	34	11
20	4	27	6	50	2	21	10
21	4	37	6	47	2	8	9
22	4	47	6	44	1	54	8
23	4	57	6	40	1	40	7
24	5	7	6	36	1	26	6
25	5	18	6	31	1	12	5
26	5	27	6	26	0	58	4
27	5	36	6	19	0	43	3
28	5	44	6	13		29	2
29	5	52	6	7		14	1
30	5	59	5	59		0	0
	XI.	*V.*	*X.*	*IV.*	*IX.*	*III.*	

Ajoutez en montant.

ÉQUATION DU NŒUD.
ANOMALIE MOYENNE DU SOLEIL.

Ajoutez en descendant.

☊.	I.	II.

Otez en descendant.

D.	VII. M.	VII. S.	VIII. M.	VIII. S.	D.
0	0	0	8	9	30
1	0	9	8	14	29
2	0	19	8	19	28
3	0	29	8	24	27
4	0	39	8	28	26
5	0	48	8	32	25
6	0	58	8	36	24
7	1	8	8	40	23
8	1	18	8	44	22
9	1	27	8	48	21
10	1	37	8	52	20
11	1	46	8	55	19
12	1	56	8	58	18
13	2	5	9	2	17
14	2	15	9	5	16
15	2	24	9	7	15
16	2	34	9	10	14
17	2	43	9	12	13
18	2	53	9	15	12
19	3	2	9	17	11
20	3	11	9	19	10
21	3	20	9	21	9
22	3	29	9	22	8
23	3	38	9	24	7
24	3	47	9	25	6
25	3	56	9	26	5
26	4	5	9	27	4
27	4	14	9	28	3
28	4	23	9	29	2
29	4	31	9	29	1
30	4	40	9	30	0

V.	IX.	I.

Ajoutez en montant.

XI.	X.	IX.

Otez en descendant.

LATITUDE DE LA LUNE.

ARGUMENT I.

(*) *Longitude vraie de la Lune, moins la longitude du Nœud, corrigée par l'équation précéd.*

	O. Boreal.		*I. Boreal.*		*II. Bor.*		
	VI. auſt.	Differ.	VII. auſt.	Differ.	VIII. auſt.	Differ.	
D.	*D. M. S.*	*M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*D.*
0	0 0 0		2 34 02		4 26 57		30
		5 23		4 39		2 40	
1	5 23		2 38 41		4 29 37		29
		5 23		4 34		2 34	
2	10 46		2 43 15		4 32 11		28
		5 22		4 32		2 29	
3	16 8		2 47 47		4 34 40		27
		5 22		4 30		2 25	
4	21 30		2 52 17		4 37 05		26
		5 21		4 26		2 19	
5	26 51		2 56 43		4 39 24		25
		5 21		4 23		2 14	
6	32 12		3 01 06		4 41 38		24
		5 21		4 19		2 09	
7	37 33		3 05 25		4 43 47		23
		5 20		4 16		2 04	
8	42 53		3 09 41		4 45 51		22
		5 19		4 13		1 58	
9	48 12		3 13 54		4 47 49		21
		5 19		4 09		1 54	
10	53 31		3 18 03		4 49 43		20
		5 16		4 06		1 47	
11	58 47		3 22 09		4 51 30		19
		5 15		4 06		1 43	
12	1 04 02		3 26 15		4 53 13		18
		5 15		3 55		1 37	
13	1 09 17		3 30 10		4 54 50		17
		5 15		3 54		1 32	
14	1 14 32		3 34 04		4 56 22		16
		5 12		3 51		1 27	
15	1 19 44		3 37 55		4 57 49		15
		5 10		3 46		1 20	
16	1 24 54		3 41 41		4 59 09		14
		5 10		3 43		1 16	
17	1 30 04		3 45 24		5 00 25		13
		5 7		3 38		1 10	
18	1 35 11		3 49 02		5 01 35		12
		5 5		3 35		1 03	
19	1 40 16		3 52 37		5 02 38		11
		5 5		3 29		59	
20	1 45 21		3 56 06		5 03 37		10
		5 1		3 25		54	
21	1 50 22		3 59 31		5 04 31		9
		5 1		3 21		48	
22	1 55 23		4 02 52		5 05 19		8
		4 59		3 18		42	
23	2 0 22		4 06 10		5 06 01		7
		4 56		3 12		39	
24	2 5 18		4 09 22		5 06 39		6
		4 54		3 07		31	
25	2 10 12		4 12 29		5 07 10		5
		4 49		3 04		24	
26	2 15 01		4 15 33		5 07 34		4
		4 49		2 58		20	
27	2 19 50		4 18 31		5 07 54		3
		4 47		2 54		14	
28	2 24 37		4 21 25		5 08 08		2
		4 44		2 48		8	
29	2 29 21		4 24 13		5 08 16		1
		4 41		2 44		3	
30	2 34 02		4 26 57		5 08 19		0
	V. Bor.		IV Bor.		III. Bor.		
	XI. Auſt.		*X. Auſt.*		*IX. Auſt.*		

(*) N. B. Cette longitude vraie de la Lune n'est celle qu'on trouve avant la réduction à l'Ecliptique, qui ne doit point entrer ici en ligne de compte.

LATITUDE DE LA LUNE.

ARGUMENT II.

Distance moyenne de la Lune au Soleil, plus la derniere équation du lieu de la Lune, moins la distance moyenne au Soleil au lieu moyen du Nœud.

O. Bor. I. Bor. II. Bor.

D.	VI. aust. M. S.	VII. aust. M. S.	VIII aust. M. S.	D.
0	0 0	4 45	8 19	30
1	9	4 52	8 23	29
2	19	5 01	8 29	28
3	29	5 10	8 34	27
4	39	5 18	8 38	26
5	48	5 27	8 43	25
6	59	5 35	8 46	24
7	1 08	5 43	8 50	23
8	1 19	5 52	8 54	22
9	1 28	6 00	8 59	21
10	1 38	6 07	9 02	20
11	1 47	6 15	9 05	19
12	1 58	6 23	9 08	18
13	2 06	6 29	9 13	17
14	2 16	6 38	9 15	16
15	2 26	6 44	9 17	15
16	2 34	6 52	9 20	14
17	2 45	6 58	9 22	13
18	2 55	7 05	9 25	12
19	3 05	7 12	9 28	11
20	3 13	7 18	9 29	10
21	3 23	7 25	9 31	9
22	3 32	7 32	9 32	8
23	3 41	7 37	9 34	7
24	3 50	7 43	9 36	6
25	3 59	7 50	9 37	5
26	4 09	7 55	9 37	4
27	4 18	8 02	9 38	3
28	4 27	8 08	9 39	2
29	4 35	8 14	9 40	1
30	4 45	8 19	9 41	0
	V. Bor.	IV. Bor.	III. Bor.	

XI. aust. X. aust. IX. aust.

ARGUMENT III.

Double Argument XIV, moins l'Argument I. de la latitude.

O. Bor. I. Bor. II. Bor.

D.	VI. aust. S.	VII. aust. S.	VIII. aust. S.	D.
0	0	11	20	30
1	0	11	20	29
2	0	12	20	28
3	1	12	20	27
4	1	13	21	26
5	2	13	21	25
6	2	13	21	24
7	2	13	21	23
8	2	14	21	22
9	3	14	21	21
10	3	15	22	20
11	4	15	22	19
12	4	15	22	18
13	5	15	22	17
14	5	16	22	16
15	5	16	23	15
16	6	16	23	14
17	6	17	23	13
18	7	17	23	12
19	7	17	23	11
20	7	17	23	10
21	8	18	23	9
22	8	18	23	8
23	9	18	23	7
24	9	19	23	6
25	9	19	23	5
26	10	19	23	4
27	10	19	23	3
28	11	19	23	2
29	11	20	23	1
30	11	20	23	0
	V. Bor.	IV. Bor.	III. Bor.	

XI. aust. X. aust. IX. aust.

POUR LA PARALLAXE DE LA LUNE.

Longitude vraie de la Lune, moins la longitude moyenne de l'Apogée.

	O^r.	I.	II.	III.	IV.	V.	
D.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	D.
0	54 4	54 24	55 23	56 52	58 31	59 50	30
1	54 4	54 26	55 26	56 55	58 34	59 52	29
2	54 4	54 27	55 28	56 59	58 37	59 54	28
3	54 4	54 29	55 31	57 2	58 40	59 56	27
4	54 4	54 30	55 33	57 6	58 43	59 58	26
5	54 5	54 32	55 36	57 9	58 46	59 59	25
6	54 5	54 33	55 39	57 13	58 49	60 1	24
7	54 5	54 35	55 41	57 16	58 52	60 2	23
8	54 5	54 36	55 44	57 19	58 55	60 4	22
9	54 6	54 38	55 47	57 23	58 58	60 5	21
10	54 6	54 40	55 50	57 26	59 1	60 7	20
11	54 6	54 42	55 53	57 29	59 4	60 8	19
12	54 7	54 43	55 56	57 32	59 7	60 9	18
13	54 7	54 45	55 59	57 36	59 10	60 10	17
14	54 8	54 47	56 2	57 39	59 12	60 11	16
15	54 9	54 49	56 5	57 42	59 15	60 12	15
16	54 9	54 51	56 8	57 45	59 17	60 12	14
17	54 10	54 53	56 11	57 49	59 20	60 13	13
18	54 11	54 55	56 14	57 52	59 23	60 14	12
19	54 12	54 57	56 17	57 55	59 25	60 15	11
20	54 13	54 59	56 20	57 58	59 28	60 16	10
21	54 14	55 1	56 23	58 2	59 30	60 16	9
22	54 15	55 3	56 26	58 5	59 33	60 17	8
23	54 16	55 6	56 30	58 8	59 35	60 18	7
24	54 17	55 8	56 33	58 12	59 38	60 19	6
25	54 18	55 11	56 36	58 15	59 40	60 19	5
26	54 19	55 13	56 39	58 18	59 42	60 20	4
27	54 20	55 16	56 43	58 22	59 44	60 20	3
28	54 22	55 18	56 46	58 25	59 46	60 20	2
29	54 23	55 21	56 49	58 28	59 48	60 20	1
30	54 24	55 23	56 52	58 31	59 50	60 20	0
	XI.	X.	IX.	VIII.	VII.	VI.	

CORRECTIONS DE LA PARALLAXE.

I. CORRECTION.

ARG XVI. De la longitude.

Otez en descendant.

Of. *I.* *II.*

Ajoutez en descendant.

D.	VI. S.	VII. S.	VIII. S.	D.
0	40	35	20	30
1	40	35	19	29
2	40	34	19	28
3	40	34	18	27
4	40	34	17	26
5	40	33	17	25
6	40	33	16	24
7	40	32	15	23
8	40	32	15	22
9	39	31	14	21
10	39	31	13	20
11	39	30	13	19
12	39	30	12	18
13	39	29	11	17
14	39	29	11	16
15	39	28	10	15
16	38	28	9	14
17	38	27	9	13
18	38	27	8	12
19	38	26	7	11
20	38	26	7	10
21	38	25	6	9
22	37	24	6	8
23	37	24	5	7
24	37	23	4	6
25	37	23	4	5
26	36	22	3	4
27	36	21	2	3
28	36	21	2	2
29	35	20	1	1
30	35	20	0	0
	V.	IV.	III.	

Ajoutez en montant

XI. *X.* *IX.*

Otez en montant.

II. CORRECTION.

DOUBLE ARG. XV. De la longitude.

Ajoutez en descendant.

Of. *I.* *II.*

Otez en descendant.

D.	VI. S.	VII. S.	VIII. S.	D.
0	30	25	15	30
1	30	25	15	29
2	30	25	15	28
3	30	24	14	27
4	30	24	14	26
5	30	24	13	25
6	30	24	13	24
7	30	24	12	23
8	30	23	12	22
9	30	23	11	21
10	30	23	11	20
11	29	22	10	19
12	29	22	10	18
13	29	21	9	17
14	29	21	9	16
15	29	21	8	15
16	29	20	8	14
17	28	20	7	13
18	28	19	6	12
19	28	19	6	11
20	28	19	5	10
21	27	18	5	9
22	27	18	4	8
23	27	18	4	7
24	27	17	3	6
25	26	17	3	5
26	26	17	2	4
27	26	17	1	3
28	26	16	1	2
29	26	16	0	1
30	25	15	0	0
	V.	IV.	III.	

Otez en montant.

XI. *X.* *IX.*

Ajoutez en montant.

EXEMPLE

Pour faire uſage de ces Tables.

SOIT propoſé de trouver la longitude de la Lune, le 18 Mai 1761 à 10 heures 22 minutes 12 ſecondes de de tems moyen au Méridien de Paris.

On ajoutera aux époques le moyen mouvement pour le dernier jour du mois d'Avril, celui qui répond à 18 jours pour le mois de Mai, & celui de $10^h\ 22'\ 12''$, de la maniere ſuivante.

	Longitude moyenne du Soleil.	Anomalie moyenne du Soleil.	Longitude moyenne de la Lune.	Longitude moyenne de l'Apogée.	Anomalie moyenne de la Lune.	Nœud aſcendant rétrograde.
	Sig. D. M. S.	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*	*Sig. D. M. S.*
1761.	09 10 20 07	06 01 32 39	07 01 01 57	08 18 37 10	10 12 24 47	02 07 38 33
Avril.	3 28 16 39	3 28 16 18	4 21 10 03	00 13 22 09	4 07 47 54	00 06 21 17
18 jour.	17 44 30	17 44 27	7 27 10 30	2 00 19	7 25 10 11	57 11
10 heur.	24 38	24 38	5 29 24	2 47	5 26 37	1 19
22 min.	54	54	12 05	6	11 57	3
12 ſec.	1	1	7	0	7	0
						00 07 19 50
	01 26 46 49	10 17 58 57	07 25 04 06	09 04 02 31	10 21 01 33	02 00 18 43

Le nœud étant rétrograde, il faut, pour avoir ſa longitude moyenne $2^s.\ 0^d.\ 18'\ 43''$, ſouſtraire de l'époque $2^s.\ 7^d.\ 38'\ 33''$ la ſomme $7^d\ 19'\ 50''$ des moyens mouvemens qui répondent au mois, au jour du mois, &c.

I. Equation. Avec l'Anomalie moyenne du Soleil 10ˢ 17° 58′ 57″, on trouvera l'équation — 7′ 34″.

II. Equation. De la Longitude moyenne du Soleil, ſi on retranche celle de l'Apogée de la Lune, on a 4ˢ 22° 44′ 17″, diſtance moyenne du Soleil à l'apogée moyen de la Lune, ou l'Argument II, avec lequel on trouve cette équation + 2′ 22″ 20‴.

III. Equation. De la Longitude moyenne du Soleil, ôtant celle du Nœud, on a 11ˢ 26° 28′ 05″, diſtance moyenne du Soleil au lieu moyen du Nœud, ou l'Argument III, avec lequel on trouve cette équation + 8″.

IV. Equation. L'Argument IV. 9ˢ 09° 00′ 28″, eſt la ſomme de l'Anomalie moyenne de la Lune & de celle du Soleil. Il ſert à trouver cette équation + 1′ 36″.

V. Equation. De l'Anomalie moyenne de la Lune, ôtant celle du Soleil, il vient pour l'Argument V, 00ˢ 03° 02′ 36″, avec lequel on trouve cette équation + 7″.

VI. Equation. De la Longitude moyenne de la Lune, ôtant celle du Soleil, on a 05ˢ 28° 17′ 17″, diſtance moyenne de la Lune au Soleil: on ajoute à cette diſtance l'Anomalie moyenne du Soleil; ce qui donne 04ˢ 16° 16′ 13″, ou l'Argument VI, avec lequel on trouve cette équation — 13″.

VII. Equation. Au double de la diſtance moyenne de la Lune au Soleil, ajoutant l'Anomalie moyenne du Soleil, la ſomme eſt l'Argument VII 10ˢ 14° 33′ 30″, avec lequel on trouve cette équation — 16″.

VIII. Equation. Du double de la distance moyenne de la Lune au Soleil, ôtant l'Anomalie moyenne du Soleil, la différence est l'Argument VIII, $1^{r}\,08°\,35'\,38''$, qui sert à trouver cette équation $-\,1'\,21''$.

IX. Equation. Au double de la distance moyenne de la Lune au Soleil, ajoutant l'Anomalie moyenne de la Lune, la somme est l'Argument IX. $10^{r}\,17°\,36'\,6''$, qui sert à trouver cette équation $+\,2'\,2''$.

X. Equation. L'Argument VII, moins l'Anomalie moyenne de la Lune, donne pour l'Arg. X. $11^{r}\,23°\,31'\,58''$, avec lequel on trouve cette équation $+\,8''$.

XI. Equation. L'Argument VIII, moins l'Anomalie moyenne de la Lune, donne pour l'Argument XI. $02^{r}\,17°\,34'\,06''$, avec lequel on trouve cette équation $+\,3'\,27''\,30'''$.

XII. Equation. La distance moyenne de la Lune au Nœud égale la longitude moyenne de la Lune, moins celle du Nœud. Or si du double de cette distance l'on ôte l'Anomalie moyenne de la Lune, la différence est l'Argument XII. $0^{r}\,28°\,29'\,12''$, avec lequel on trouve cette équation $+\,29''\,30'''$.

XIII. Equation. L'Argument VII, plus l'Argument XI donne l'Argument XIII. $01^{r}\,02°\,07'\,36''$, qui sert à trouver cette équation $-\,38''$.

Somme des équations positives . . . . . $10'\,19''\,40'''$
Somme des équations négatives . . . . . $10\;02$

Eqution *A* positive . . . . . $09\;17\;40$

Si la ſomme des équations négatives avoit ſurpaſſé la ſomme des équations poſitives, l'équation *A* auroit été négative.

XIV. Equation. A l'Anomalie moyenne de la Lune; il faut ajouter l'équation *A* pour avoir l'Argument XIV. 10ᶜ 21° 01′ 50″, avec lequel on trouve l'équation du centre de 3° 45′ 41″ poſitive.

XV. Equation. A la diſtance moyenne de la Lune au Soleil, il faut ajouter l'équation *A*. Cela donne l'Arg. XV. 5ᶜ 28° 17′ 35″, qui ſert à trouver la variation de − 2′ 33″.

XVI. Equation. Du double de l'Argument XV, ôtant l'Anomalie moyenne de la Lune, on a l'Argument XVI. 1ᶜ 05° 33′ 36″, qui fait trouver la derniere équation de 44′ 25″.

Equation du centre poſitive . . .	3°	45′	41″	0‴
Equation *A*		17	40	
Somme des équations poſitives . .	3	45	58	40
Equation de la variation négative . .		2′	33″	
XVI. Equation auſſi négative . . .		44	25	
Somme des équations négatives . .		46	58.	

La ſomme des équations poſitives eſt plus grande que celle des négatives; ainſi leur différence doit être ajoutée à la longitude moyenne de la Lune, pour avoir la longitude vraie de cet Aſtre dans ſon orbite.

Longitude moyenne de la Lune . . .	7ᶜ	25°	04′	06″
Equation additive		2	59	01
Long. vraie de la Lune dans ſon orbite	7	28	03	07

Réduction à l'Ecliptique. De la longitude vraie de la Lune, ôtant la longitude moyenne du Nœud, il vient $5^{f}\ 27°\ 44'\ 16''$. Avec cet Argument on trouvera la réduction de $+\ 33''$. Ainſi la longitude vraie de la Lune réduite à l'Ecliptique, & comptée de l'Equinoxe, ſera de $7^{f}\ 28°\ 03'\ 40''$, dont il faudra retrancher $15''$ à cauſe de l'équation de la *préceſſion* en longitude.

Correction du Nœud. L'Anomalie moyenne du Soleil donnera pour l'équation du nœud $-\ 5'\ 53''$; la longitude du nœud corrigée ſera donc de $02^{f}\ 00°\ 12'\ 50''$.

Latitude. I. Equation. Si de la longitude vraie de la Lune dans ſon orbite, on ôte la longitude du nœud corrigée, on aura l'Argument premier de la latitude de $5^{f}\ 27°\ 50'\ 17''$. Avec cet Argument on trouve la latitude de $11'\ 37''$ boréale.

II. Equation. Retranchant la diſtance moyenne du Soleil au lieu moyen du Nœud, de la diſtance moyenne de la Lune au Soleil, & y ajoutant la derniere équation du lieu de la Lune, on a le ſecond Argument de la latitude de $6^{f}\ 01°\ 04'\ 47''$. Cet Argument fait trouver une ſeconde latitude de $10''$ auſtrale.

III. Equation. Otant du double de l'Argument XIV, l'Argument I. de la latitude, il vient un troiſiéme Argument qui ſert à trouver une troiſiéme latitude de $22''$ boréale.

La latitude vraie de la Lune ſera donc boréale, & de $11'\ 49''$.

Parallaxe. La longitude vraie de la Lune moy-

longitude moyenne de l'Apogée, nous fera trouver pour la parallaxe 54′ 33″.

I. Correction. L'Argument XV. de la longitude donne pour cette premiere correction — 40″.

II. Correction. Le double de l'Argument XIV de la longitude, fait trouver pour cette ſeconde correction + 30″.

Ainſi la vraie Parallaxe de la Lune ſe trouve être de 54′ 23″.

Si on s'en rapporte aux calculs faits dans la *Connoiſſance des Tems* ſur les Tables de M. Mayer, on aura,

La longitude vraie ſur l'orbite de . . .	7	28°	04′	16″
La longit. vraie réd. à l'Ecliptique de	7	28	04	46
La latitude vraie boréale de			10	37
La Parallaxe de			54′	40″

Fin des nouvelles Tables de la Lune.

QUINZIÉME

QUINZIÉME MÉMOIRE.

De la Libration de la Lune.

I.

LA figure non circulaire de l'orbite de la Lune, & l'irrégularité du mouvement de la Lune dans cette orbite, ne ſont pas les ſeules cauſes de la libration que l'on obſerve dans cette Planète. Cette libration vient auſſi en partie de deux autres cauſes; 1°. de ce que l'axe de la Lune n'eſt pas perpendiculaire à l'orbite de cette Planète; 2°. de ce que les nœuds de cette orbite, & probablement l'axe même de la Lune, ont un mouvement de rotation autour des pôles de l'Ecliptique.

II.

Le mouvement des nœuds de l'orbite lunaire eſt conſtaté par les obſervations & par la théorie, & on en connoît aſſez éxactement la valeur. A l'égard du mouvement de l'axe lunaire, ni la théorie, ni les obſervations ne nous ont encore preſque rien appris à ce ſujet. Cependant ſi la Lune, comme on n'en ſauroit douter,

tourne autour de ſon axe, il s'enſuit qu'elle doit être un ſphéroïde applati, & dès-là il eſt démontré par la théorie de la préceſſion des équinoxes, que cet axe ne ſauroit demeurer éxactement parallèle à lui-même.

III.

Ce n'eſt pas tout; la Lune nous préſentant toujours à-peu-près la même face, il eſt viſible que l'action de la Terre doit allonger cette Planète dans le ſens de la ligne qui joint la Lune & la Terre; or comme l'axe de la Lune fait un angle de près de 90 degrés avec l'Ecliptique, la ligne qui joint les centres de la Terre & de la Lune, eſt à-peu-près dans le plan de l'équateur de cette derniere Planète. L'équateur de la Lune doit donc être allongé dans le ſens du diametre qui va de la Lune à la Terre, & par conſéquent avoir la figure d'une Ellipſe, dont le grand axe ſoit à-peu-près dans la direction de la Lune à la Terre. D'un autre côté la rotation de la Lune autour de ſon axe, doit renfler l'équateur, & rendre les méridiens des Ellipſes; ainſi dans la Lune les méridiens, l'équateur & les parallèles doivent être des Ellipſes.

IV.

J'ai donné dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1754, une méthode pour trouver les mouvemens de l'axe dans de pareils ſphéroïdes. Voici le réſultat de cette méthode, qu'il eſt néceſſaire de rap-

peller ici. Supposons qu'on fasse passer un méridien par l'axe de la Planète, & par un des deux axes de l'équateur, n'importe lequel; soit le demi axe de la Planète (celui qui est commun à tous les méridiens) $= 1$, & un des demi-axes de l'équateur $1 + \alpha$, α étant positif ou négatif; soit aussi l'autre demi axe de l'équateur $1 + \alpha + \beta$, β étant aussi positif ou négatif; les phénomenes de la précession des équinoxes seront les mêmes que si l'équateur étoit circulaire, & que son demi diametre fût $1 + \alpha + \frac{\beta}{2}$, le demi axe de la Planète étant toujours supposé égal à l'unité.

V.

Si on avoit fait passer le méridien par les demi axes 1, & $1 + \alpha + \beta$, l'autre demi axe $1 + \alpha$ auroit été $1 + \alpha + \beta - \beta$; & le demi diametre de l'équateur, supposé circulaire, auroit été, suivant la Proposition précédente, $1 + \alpha + \beta - \frac{\beta}{2} = 1 + \alpha + \frac{\beta}{2}$, comme ci-dessus; ce qui prouve ce que nous disions il n'y a qu'un moment, qu'il n'importe par lequel des deux axes de l'équateur on fasse passer le méridien supposé, & que le résultat sera toujours le même.

VI.

Or en supposant la Lune homogene (car c'est la seule supposition que nous puissions faire ici) & en regardant

tourne

d'abord l'équateur comme circulaire, soit la masse de la Terre . . . . . θ,

Celle de la Lune . . . . . λ,

Le tems de la révolution de la Terre autour de son axe . . . . . t,

Le tems de la révolution de la Lune autour de son axe . . . . . t',

Le rayon de la Terre . . . . . r,

Celui de la Lune . . . . . r',

Et on aura, comme il eſt aiſé de conclure de la ſeconde Partie de nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, art. 346;

$$a = \frac{\theta\, r'^3\, t^2}{230\, \lambda\, r^3\, t'^2};$$

quantité dans laquelle le rapport $\frac{\theta}{\lambda}$ de la maſſe de la Terre à celle de la Lune = à-peu-près 75, $\frac{r'}{r} = \frac{100}{365}$, & $\frac{t}{t'} = \frac{23^h \cdot 56'}{27^j \cdot 7^h \cdot 43'}$; ce qui donne,

$$a = \frac{1}{111936,6720}.$$

VII.

Faiſons préſentement abſtraction de la rotation de la Lune; & n'ayons égard qu'à l'action de la Terre, qui doit allonger cette Planète dans le ſens de ſon équateur: ſoit f la quantité dont le demi axe de l'équateur de la Lune, qui eſt à-peu-près dans la même ligne que le centre de la Terre, ſurpaſſe l'autre demi axe; & on aura

par les formules que j'ai données dans mes *Recherches sur la Cauſe des Vents* (art. 31.), en nommant $\mathfrak{D}$ la diſtance de la Terre à la Lune,

$$f = \frac{3\theta r'^3}{2\lambda \mathfrak{D}^3} \times \frac{1}{2};$$

Et par conſéquent,

$$\frac{\varrho}{x} = \frac{15\theta r'^3}{8\lambda \mathfrak{D}^3};$$

Donc ſuppoſant $\mathfrak{D} = 60$ fois le rayon de la Terre, on trouvera $\frac{\varrho}{x} = \frac{1}{74691,2640}$.

VIII.

Maintenant, puiſque α eſt la quantité dont le Globe de la Lune ſeroit applati par la rotation, & ρ celle dont il ſeroit allongé par l'action de la Terre; il s'enſuit, comme il a été démontré dans les *Recherches ſur la Cauſe des Vents*, art. 62, que ces deux cauſes conjointes produiront ſenſiblement le même effet ſur le ſphéroïde lunaire; enſorte que le demi axe étant ſuppoſé $= 1$, le demi axe de l'équateur lunaire qui paſſe par le centre de la Terre, ſera à-très-peu-près $1 + \alpha + \rho$, & l'autre demi axe, diſtant de celui-là de 90 degrés, ſera $1 + \alpha$.

IX.

Donc en regardant la Lune comme homogene, le mouvement de ſon axe autour des poles de l'Ecliptique ſera le même que ſi le demi axe étant $= 1$, l'équateur

étoit circulaire, & avoit pour rayon $1 + \alpha + \frac{\varepsilon}{2} =$

$1 + \frac{1}{111936,6720} + \frac{1}{74691,2640} = 1 + \frac{1}{42806,1634}$.

Voyons ce qui réſulte de cette ſuppoſition.

X.

Nous nous rappellerons d'abord, que ſuivant l'art. 345 de la ſeconde Partie des *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, ſi on fait

l'angle de l'axe de la Lune avec l'Ecliptique $= \pi$;

$1 + \zeta = 178\frac{3}{4} = 179$ à-très-peu-près;

$k = -\frac{27^j.7^h.43'}{365^j.6^h.9'}$;

le mouvement rétrograde des points équinoxiaux lunaires pendant une année ſolaire, ſera

$\frac{3}{2}\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) \times \frac{2+\zeta}{-k} \times 360^\circ \times \text{ſin. } \pi.$

Et comme l'angle de l'axe de la Lune avec l'Ecliptique eſt de près de 90 degrés, ſi on regarde ſin. π comme $= 1$, on aura le mouvement rétrograde cherché égal à

$\frac{3}{2}\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) \times \frac{2+\zeta}{-k} \times 360^\circ =$ environ $11' 8''$

dans le cours d'une année ſolaire.

XI.

Dans le cours d'un mois péribdique lunaire, qui n'eſt que de $27^j 7^h 43'$, il faudra, pour avoir la préceſſion des points équinoxiaux lunaires, multiplier la quantité pré-

cédente par $\frac{27^j.7^h.43'}{365^j.6^h.9'}$; ce qui donnera la préceſſion pendant un mois lunaire, égale à 50″, préciſément comme celle qu'on obſerve dans les points équinoxiaux de la Terre pendant le tems d'une révolution de cette Planète.

Ainſi, en ſuppoſant la Lune homogene, ſes points équinoxiaux rétrograderoient pendant le tems d'une révolution de la Lune autour de la Terre, préciſément de la même quantité que les points équinoxiaux de la Terre rétrogradent pendant le tems d'une révolution de la Terre autour du Soleil. Propoſition qui m'a paru digne d'être remarquée; quoique je ne prétende d'ailleurs en tirer aucune conſéquence. Car outre que nous ignorons ſi la Lune eſt homogene, & ſi par conſéquent la préceſſion de ſes points équinoxiaux eſt réellement de 50″ dans l'eſpace d'un mois périodique, il eſt certain que ſi la Terre étoit homogene, la préceſſion annuelle de ſes points équinoxiaux, ſeroit de beaucoup plus de 50″; en effet par l'action ſeule du Soleil, cette préceſſion ſeroit d'environ 21″ 13‴, & la préceſſion par l'action ſeule de la Lune ſeroit environ $21'' 13''' \times (\frac{179}{75}) = 21'' 13''' \times (2 + \frac{29}{75}) = 21'' 13''' \times (2 + \frac{2}{5})$ à-très-peu-près. Ainſi la préceſſion totale des points équinoxiaux de la Terre ſeroit d'environ 1′ 12″, ſi la Terre étoit homogene (a).

(a) Dans nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, ſeconde Partie art. 374 à la fin, nous avons remarqué une autre analogie ſinguliere entre la rotation

XII.

Outre cette préceſſion, l'axe de la Lune aura un mouvement de nutation répondant au mouvement des nœuds de la Lune, & qui s'achevera dans le même tems; & ſi on appelle m' la tangente de l'inclinaiſon de l'orbite lunaire au plan de l'Ecliptique, n' le rapport du mouvement annuel des nœuds de la Lune à l'arc de 360°, on trouvera (art. 345 des *Recherches ſur le Syſtême du Monde, ſeconde Partie*) 1°. que la nutation de l'axe ſera $\frac{3}{2}\left(\alpha + \frac{\rho}{2}\right) \times \frac{1+\zeta}{-k} \times \frac{\text{ſin. } \pi \times m'}{n' - M}$, M étant $= \frac{11'\ 8''}{360^\circ}$; c'eſt-à-dire, égal au rapport du mouvement annuel des points équinoxiaux lunaires à l'arc de 360 degrés.

2°. Que l'équation de la préceſſion ſera $\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\rho}{2}\right) \times \frac{1+\zeta}{-k} \times \frac{m'}{n' - M} \times \frac{\text{cof. } 2\pi}{\text{cof. } \pi} \times 57^\circ\ 17'\ 44''$.

XIII.

Or comme les nœuds de la Lune parcourent environ 19° 21′ par an, on aura $n' = \frac{19^\circ\ 21'}{360^\circ} =$ environ $\frac{29}{540}$; & il eſt clair que cette fraction étant conſidérablement plus grande que $M = \frac{11'\ 8''}{360^\circ}$, on peut dans la formule

de la Terre & celle de la Lune, ſuppoſées toutes deux homogenes. Nous y renvoyons le Lecteur.

précédente

précédente mettre ſimplement n' au lieu de $n' - M$; de plus la tangente m' de l'inclinaiſon de l'orbite lunaire $=$ tang. $5° 9' = \frac{901273}{10000000}$. Donc en ſuppoſant ſin. $\pi =$ au ſinus total $= 57° 17' 44''$, on trouvera (à cauſe de $1 + 6 = 179$) la nutation de l'axe de la Lune $= 2' 48''$ environ.

XIV.

A l'égard de l'équation de la préceſſion, comme π eſt à-peu près 90 degrés, cof. 2π ſera à-peu-près $=$ au ſinus total; mais pour cof. π nous prendrons le coſinus de 88 degrés, l'angle de l'axe lunaire avec l'Ecliptique étant à-peu-près de cette quantité, ſuivant les obſervations de M. Caſſini. Donc on aura cof. $\pi = \frac{348995}{10000000}$; & pour avoir l'équation de la préceſſion, il faudra multiplier la quantité de la nutation, trouvée dans l'article précédent, par $\frac{1}{\text{cof. } \pi}$, ou $\frac{10000000}{348995}$; ce qui donnera pour cette équation, $1° 20' 13''$.

XV.

Donc, en récapitulant tout ce qui vient d'être trouvé, on voit que ſi la Lune eſt ſuppoſée homogene,

Ses points équinoxiaux rétrograderont pendant une année ſolaire d'environ . . . . . $11' 8''$,

Et pendant un mois périodique lunaire, d'environ $50''$.

Que de plus le mouvement des points équinoxiaux

ſera ſujet à une équation d'environ 1° 20′, tantôt additive, & tantôt ſouſtractive, pendant le tems d'une révolution des nœuds de la Lune, c'eſt-à-dire, en dix-huit ans & ſept mois.

Qu'enfin pendant ce même-tems de dix-huit ans & ſept mois, l'axe de la Lune ſera ſujet à une nutation d'environ 2′ 48″, tantôt pour s'approcher, tantôt pour s'éloigner de l'Ecliptique; & par conſéquent à une nutation totale d'environ deux fois 2′ 48″, c'eſt-à-dire, de 5′ 36″.

XVI.

Tels ſont les phénomenes de la nutation de l'axe de la Lune & de la préceſſion des points équinoxiaux de la Lune, dans l'hypothèſe que cette Planète ſoit homogène. Mais comme cette ſuppoſition eſt abſolument gratuite, les conſéquences qui en réſultent par rapport au mouvement de l'axe Lunaire, le ſont auſſi. Cependant j'ai cru que les Mathématiciens verroient avec plaiſir cet eſſai ſur les mouvemens de l'axe de la Lune, dans l'hypothèſe la plus ſimple que l'on puiſſe faire à ce ſujet, & par laquelle on peut au moins donner quelque idée de ces mouvemens.

XVII.

Pour déterminer par la théorie les loix du mouvement de l'axe lunaire, il faudroit connoître par obſervation; 1°. le rapport de cet axe aux deux axes de l'équateur; 2°. le rapport des deux axes de l'équateur; 3°. la

diſpoſition intérieure des parties qui compoſent la maſſe de la Lune; car la variété de cette diſpoſition doit faire varier les mouvemens de l'axe, comme il eſt aiſé de le conclure des formules que nous avons données ſur cela dans les Mém. de l'Académie de 1754, p. 421.

Or quant à ce dernier article, aucune obſervation, ni aucune théorie ne peuvent nous le faire connoître. Quant au ſecond, comme un des axes de l'équateur lunaire eſt à-peu-près dans la ligne qui joint la Lune & la Terre, il n'eſt pas poſſible non plus de connoître cet axe par l'obſervation, ni par conſéquent le rapport des axes de l'équateur lunaire. Quant au troiſiéme, la différence de l'axe de la Lune & de celui des axes de l'équateur que nous pouvons voir & meſurer, eſt ſi petite qu'elle échappe à une meſure éxacte. M. Mayer laiſſant à part le diametre de la Lune qui paſſe par la Terre, & qu'on ne ſauroit meſurer, a obſervé la différence des deux diametres viſibles; il l'a trouvée tantôt en plus, tantôt en moins, & raſſemblant enſuite les différences par une eſpéce de milieu, il juge que l'axe de la Lune eſt plus petit d'environ 2″ à 3″, que le diametre viſible de l'équateur lunaire. Mais cet habile Aſtronome ne diſſimule pas lui-même combien ces déterminations ſont peu certaines.

XVIII.

Au reſte il n'eſt pas étonnant, vû la lenteur du mouvement de rotation de la Lune, que la différence de

ſes deux diametres viſibles ſoit ſi petite ; la théorie hypothétique que nous avons expoſée ci-deſſus, ne donne pour la différence de ces deux diametres qu'environ $\frac{1}{112000}$, ce qui eſt fort au-deſſous de 1″ ; car le diametre de la Lune étant ſuppoſé d'environ 34′, une ſeconde de différence dans les deux diametres donneroit $\frac{1}{2040}$ pour cette différence, quantité fort au-deſſus de $\frac{1}{112000}$ que nous a donné la théorie. Et quand même la différence des deux diametres de la Lune ſeroit de $\frac{1}{2040}$, il ſeroit très-difficile, ſuivant la remarque de M. Mayer, de s'en aſſurer ; puiſque les erreurs qu'on peut commettre dans l'obſervation des diametres de la Lune, ſont de 1″ au moins, & par conſéquent au moins égales à la fraction $\frac{1}{2040}$.

XIX.

Il réſulte de tout ce qu'on vient de dire, qu'on ne peut connoître par la théorie le mouvement de l'axe de la Lune, faute d'élémens ſuffiſans pour le déterminer. Ce ne peut donc être que par les obſervations, qu'on peut eſpérer d'y parvenir. M. Mayer a publié ſur ce ſujet un ſavant Ecrit dans les Ephémérides de Nuremberg ; & un habile Géometre Italien ayant cherché une

méthode (*a*) pour trouver la position de l'axe de la Lune par trois observations d'une tache, trouve, d'après les observations de M. Mayer, que la position de l'axe de la Lune est variable, que son inclinaison est, suivant les circonstances, de 2° 8′, de 1° 22″, de 1° 38″; d'où il conclud que l'inclinaison moyenne est de 1° 43′; ce qui est fort différent de l'inclinaison fixée par M. Cassini à deux degrés $\frac{1}{2}$. Il trouve aussi que par une des observations, le nœud de l'équateur lunaire, son point d'intersection avec l'Ecliptique, est de 12° plus oriental que le nœud de l'orbite lunaire; dans une seconde observation il le trouve de 4° plus oriental; & enfin dans une troisiéme de 21°. plus occidental; d'où il conclud que les nœuds de l'équateur lunaire ont un mouvement rétrograde beaucoup plus prompt que les nœuds de l'orbite de la Lune; ce qui suffiroit pour renverser, s'il étoit nécessaire, la prétention de quelques Astronomes, qui ont supposé, sans aucune preuve tirée des observations ni de la théorie, que les nœuds de l'équateur lunaire, & ceux de l'orbite lunaire, ont le même mouvement. Au reste le Géometre dont nous venons de parler, convient que toutes les déterminations précédentes sont assez incertaines, parce qu'une légere erreur dans les observations, en produit une fort grande dans le résultat

(*a*) Cette méthode que M. Delisle a bien voulu me communiquer, ainsi que la traduction françoise de l'Ouvrage de M. Mayer, n'est, je crois, encore que manuscrite; je ne la donne point ici, afin de laisser à l'Auteur l'avantage de la publier lui-même, s'il le juge à propos.

qu'on cherche. Ce n'eſt donc que par des obſervations multipliées & réitérées, qu'on pourra parvenir à quelques connoiſſances certaines ſur les vrais mouvemens de l'axe de la Lune.

XX.

Il eſt d'autant plus néceſſaire de connoître éxactement ces mouvemens, que c'eſt le ſeul moyen de décider ſi la rotation de la Lune autour de ſon axe eſt éxactement égale à ſon mouvement moyen autour de la Terre. En effet nous avons déja fait voir dans nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, II. Partie art. 374, que ſi l'axe de la Lune n'eſt pas ſuppoſé toujours parallèle à lui-même, l'égalité prétendue entre le mouvement de rotation de la Lune, & ſon mouvement moyen autour de la Terre, n'eſt pas rigoureuſement vraie; ce qui ne doit pas paroître ſurprenant; car le mouvement conique de l'axe autour du centre, produit dans le reſte du globe une ſorte de rotation qui doit ſe combiner avec la rotation autour de ce même axe, & d'où il réſulte une ſeule & unique rotation qui ſe fait à chaque inſtant autour d'un axe mobile & variable, & qui elle-même n'eſt pas uniforme.

XXI.

Avant que de finir ce Mémoire, je ferai quelques obſervations ſur la ſolution du Problême de la préceſſion des Equinoxes, dans l'hypothèſe des Méridiens ſembla-

bles ou diſſemblables entr'eux. Nous avons trouvé dans les Mémoires de l'Académie de 1754, $dP = -di \sin. \pi + k\,dz$, dP exprimant le mouvement de rotation du ſphéroïde, di le mouvement de rotation de l'axe projetté ſur le plan de l'Écliptique, π l'angle de l'axe avec l'Ecliptique, & $k\,dz$ une conſtante. Or il eſt aiſé de voir que tandis que la projection de l'axe parcourt l'angle di, le point de l'équateur qui ſe trouve dans le plan paſſant par l'axe, & perpendiculaire à l'Ecliptique, décrit dans le plan même de l'équateur un angle $= + di \sin. \pi$; & cela en vertu du ſeul mouvement de l'axe, tel que nous l'avons ſuppoſé dans la ſolution de ce Problême, & dans le ſecond Mémoire imprimé au *Tome I.* de ces Opuſcules. Donc combinant ce mouvement $+ di \sin. \pi$ avec le mouvement dP, il en réſulte que le point de l'équateur dont il s'agit, décrit réellement un angle $= + di \sin. \pi - di \sin. \pi + k\,dz$, c'eſt-à-dire, un angle conſtant $k\,dz$. D'où il s'enſuit que ſi au lieu de ſuppoſer mobile avec l'axe, comme nous l'avons fait, le rayon de l'équateur qui eſt perpendiculaire à la commune ſection de l'équateur & de l'Ecliptique, on ſuppoſe d'abord ce rayon immobile à cet égard pendant l'inſtant dt, & qu'on appelle dP le mouvement de rotation que cet axe auroit enſuite dans le plan de l'équateur, on trouveroit alors ſimplement $dP = k\,dz$, ou $ddP = o$; ce qui pourroit rendre les équations plus ſimples, au moins à certains égards. C'eſt une vûe que nous propoſons à ceux qui voudront

dans la ſuite réſoudre par une méthode ſemblable à la nôtre, le Problême de la préceſſion des Equinoxes; & même celui qui eſt réſolu dans le ſecond Mémoire de ces Opuſcules, *Tome I.* Peut-être pourrai-je moi-même revenir ſur cette matiere dans quelqu'autre occaſion, ſi je ne ſuis là-deſſus prévenu par perſonne.

XXII.

Une autre remarque que je ne dois pas omettre, c'eſt que la ſolution du Problême de la préceſſion des Equinoxes, dans l'hypothèſe des Méridiens diſſemblables, ceſſeroit d'être éxacte, & peut-être poſſible, ſi k n'étoit pas un nombre aſſez grand par rapport à l'unité. Car, comme je l'ai remarqué, p. 418 des Mémoires de l'Académie de 1754, cette ſolution demande que l'on puiſſe négliger dans l'intégration les termes qui contiendroient ſin. kz, ou cof. kz; & pour cela il faut que la quantité kk qui ſe trouve au dénominateur de ces termes après la double intégration, ſoit beaucoup plus grande que l'unité. Or cela arrive en effet; 1°. dans le mouvement de rotation de la Terre, où k eſt $= 366\frac{1}{4}$; 2°. dans celui de la Lune, où $k = 13\frac{1}{2}$ à-peu-près, & où $kk =$ environ 180. Mais ſi k étoit, par exemple, $= 1$, c'eſt-à-dire, ſi le tems de la rotation de la Lune autour de ſon axe étoit de $365^{j}\frac{1}{4}$, alors la ſolution ne pourroit plus être admiſe.

Fin du Tome ſecond.

FAUTES À CORRIGER.

Dans ce second Tome.

Page 80, *lig.* 8, *au lieu de* plus grand, *lisez* plus petit; & *lig.* 9, *au lieu de* plus petit, *lisez* plus grand.

Page 110, *lig.* 19. *au lieu de* nous y avions, *lisez* nous avions.

Page 125, *lig.* 6, au lieu de $-QX$, lisez $+QX$; & au lieu de $+\int X\,dQ$, lisez $-\int X\,dQ$.

Page 160, *lig.* 3, *au lieu de* 4″, *lisez* 44″.

Page 166, *lig.* 8, *au lieu de* $\text{cof. } \alpha' = \frac{-2000000+\delta}{\delta-a}$, *lisez* $\text{cof. } \alpha' = \frac{\theta}{2000000} - \varepsilon$.

Page 175, *lig.* 10, au lieu de Y, lisez Y''.

Page 246, *lig.* 15, *après* $\frac{u}{\text{cof. } z}$ *mettez* une virgule.

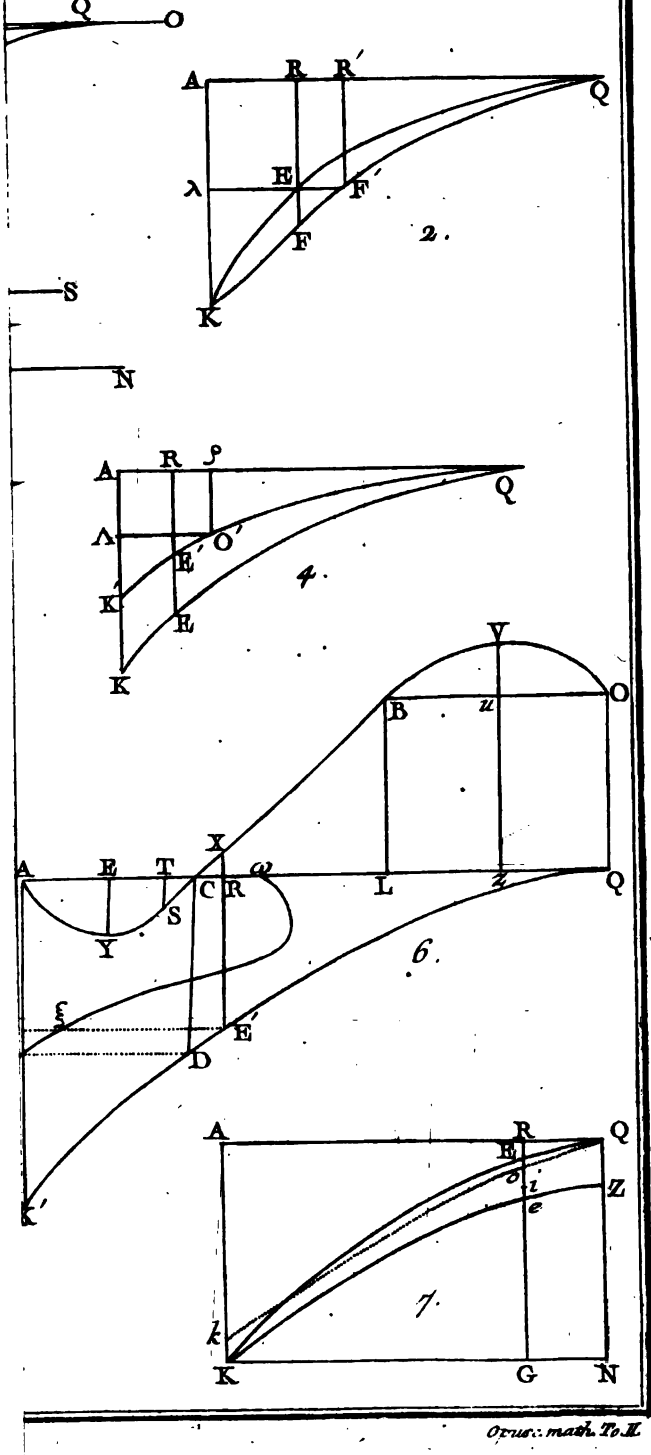
EXTRAIT DES REGISTRES

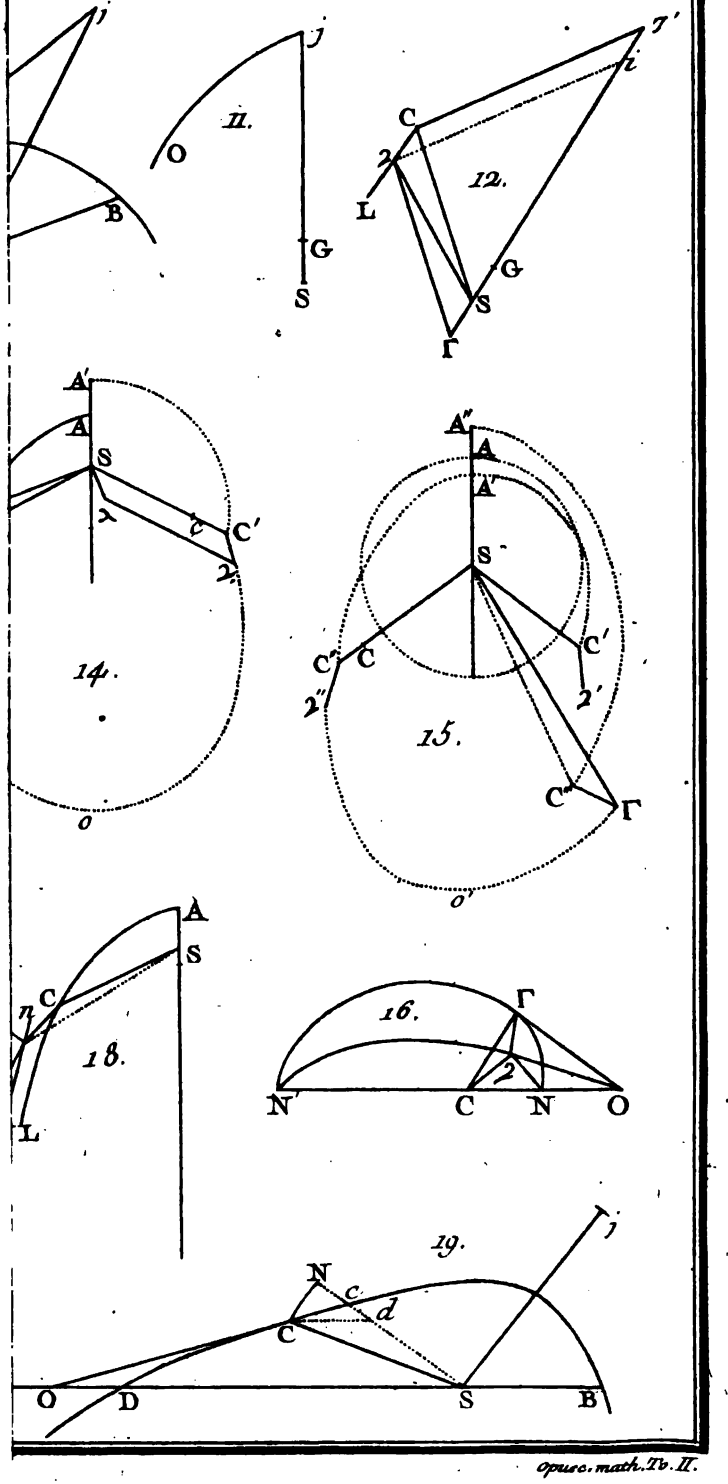
DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

Du 17 Juin 1761.

MEssieurs LE MONNIER & BEZOUT, qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. D'ALEMBERT, intitulé *OPUSCULES MATHÉMATIQUES*, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression; en foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris le 17 Juin 1761.

GRANDJEAN DE FOUCHY,
Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.


Q
O
A
R
R'
Q
λ
E
F'
F
2.
K
S
N
A
R
ρ
Q
Λ
O'
E'
K
E
4.
K
V
B
u
O
A
E
T
X
C
R
ω
L
z
Q
S
Y
6.
ξ
E'
D
k'
A
R
Q
E
o
i
Z
e
7.
k
K
G
N


j
B
11.
j
O
G
S
7'
i
C
2
12.
L
G
S
Γ
A'
A
S
λ
c
C'
2
14.
o
A''
A
A'
S
C''
C
C'
2''
2'
15.
C''
Γ
o'
A
S
n
C
18.
L
16.
Γ
2
N'
C
N
O
19.
j
N
c
d
C
O
D
S
B

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre, à nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand'Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien amés LES MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, nous ont fait expoſer qu'ils auroient beſoin de nos Lettres de Privilége pour l'impreſſion de leurs Ouvrages: A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Expoſans, nous leur avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer, par tel Imprimeur qu'ils voudront choiſir, toutes les Recherches ou Obſervations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Aſſemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des Particuliers qui la compoſent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner leſdits Ouvrages, & jugé qu'ils ſont dignes de l'impreſſion, en tels volumes, forme, marge, caracteres, conjointement ou ſéparément, & autant de fois que bon leur ſemblera, & de les faire vendre & débiter par-tout notre Royaume, pendant le tems de vingt années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes; ſans toutefois qu'à l'occaſion des Ouvrages ci-deſſus ſpécifiés, il puiſſe en être imprimé d'autres qui ne ſoient pas de ladite Académie: faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance; comme auſſi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre & débiter leſdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit deſdits Expoſans, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans; dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auſdits Expoſans, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie; qu'avant de les expoſer en vente, les Manuſcrits ou Imprimés qui auront ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Ouvrages, ſeront remis ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le ſieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un en celle de notre

Château du Louvre, & un en celle de notre-dit très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France; le tout à peine de nullité desdites Présentes: du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir lesdits Exposans & leurs ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés féaux Conseillers & Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires; CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le dix-neuviéme jour du mois de Mars, l'an de grace mil sept cens cinquante, & de notre Régne le trente-cinquiéme. Par le Roi en son Conseil. MOL.

Registré sur le Registre XII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, No. 430. fol. 309. conformément au Réglement de 1723, qui fait défenses, article IV, à toutes personnes, de quelque qualité qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour vendre, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement; à la charge de fournir à la susdite Chambre huit Exemplaires de chacun, prescrits par l'art. CVIII. du même Réglement. A Paris le 5 Juin 1750.

Signé, LE GRAS, *Syndic.*

De l'Imprimerie de J. CHARDON.